

# Fourierreihen und Fouriertransformation

## Anleitung zu Experimenten

**Bernd Lingelbach**  
FH-Aalen, FB Augenoptik  
und  
Institut für Augenoptik Aalen (IfAA), Außenstelle Leinroden  
Leinroden, Untere Gasse 17, 73453 Abtsgmünd  
Bernd.Lingelbach@fh-aalen.de

**Britta Neustadt**  
FH-Aalen, FB Augenoptik  
Gartenstraße 133, 73430 Aalen

**Dirk Spanuth**  
Stipendiat der Zeiss-Stiftung  
FH-Aalen, FB Augenoptik  
Gartenstraße 133, 73430 Aalen

**Werner Schneider**  
Physikalisches Institut, Didaktik der Physik  
Universität Erlangen  
Staudtstraße 7 (B2), 91058 Erlangen

**Das Projekt wird unterstützt von LARS, 2000-2001  
(Leistungs-Anreiz-Systeme, Baden Württemberg)**

### **Kurzfassung:**

In der Optik spielen Fourierreihen und Fouriertransformation eine zentrale Rolle. Es ist aber unmöglich, einem Schüler beim Thema *Abbildung durch eine Linse* zu sagen. "In der hinteren Brennebene der Linse finden Sie die Fouriertransformierte des Objekts". Gewöhnlich kann sich der Schüler schon unter einem *Sinusgitter* Nichts vorstellen. Andererseits ist es notwendig, ein Grundwissen von Fourieroptik zu haben, um zum Beispiel die Theorie des Mikroskops zu verstehen. Wie soll ein Schüler die Abbe'sche Formel zur Auflösung des Mikroskops glauben, wenn er von der Zerlegung des Objekts in seine Fourier - Bestandteile keine Ahnung hat?

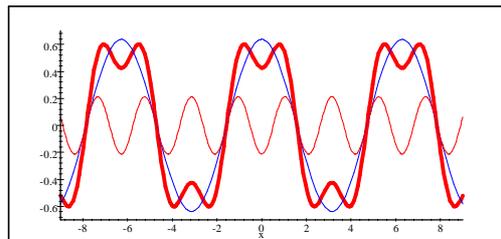
Mit der hier vorgestellten Visualisierung von Fourierreihen soll diese Lücke geschlossen werden.

## Inhalt

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Vorbemerkung: Methode zur Visualisierung einer Fourierreihe</b> | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Experimente mit dem Maddoxzylinder und den Folien</b>           | <b>4</b>  |
| 2.1      | Durchführung der Experimente                                       | 5         |
| 2.2      | Mathematischer Hintergrund ( <i>kann übersprungen werden</i> )     | 6         |
| <b>3</b> | <b>Fourier - Reihen</b>  | <b>7</b>  |
| 3.1      | Sinusgitter  | 7         |
| 3.2      | Rechteckgitter   | 8         |
| 3.3      | Missing Fundamental  | 9         |
| 3.4      | Hochpaß  | 9         |
| 3.5      | Tiefpaß  | 10        |
| 3.6      | Bandpaß  | 11        |
| 3.7      | Dynamische Visualisierung  | 11        |
| <b>4</b> | <b>Fouriertransformation</b>                                       | <b>12</b> |
| 4.1      | Übergang von periodischen zu aperiodischen Mustern                 | 12        |
| 4.2      | Ortsfrequenz   | 13        |
| 4.3      | Amplituden   | 14        |
| 4.4      | Weitere Vergrößerung der Periode                                   | 15        |
| 4.5      | Grenzfall Fouriertransformation                                    | 18        |
| <b>5</b> | <b>Optische Täuschungen</b>  | <b>19</b> |
| 5.1      | Stufenfunktion (Mach'sche Streifen)                                | 19        |
| 5.2      | Cornsweet Illusion   | 20        |
| 5.3      | Hermanngitter (Ludimar Hermann 1870)                               | 22        |
| 5.4      | Scintillating Grid   | 23        |
| <b>6</b> | <b>Eine Übungsaufgabe</b>  | <b>24</b> |
| 6.1      | Die Aufgabe  | 24        |
| 6.2      | Die Lösung   | 24        |

## 1 Vorbemerkung: Methode zur Visualisierung einer Fourierreihe

Die Visualisierungshilfen zu Fourierreihen sind in den gängigen Lehrbüchern in der Regel auf die teilweise Addition der Komponenten beschränkt. Es wird gewöhnlich nur gezeigt, wie sich nach und nach ein periodisches Muster aus seinen Fourieranteilen zusammensetzt. Die Visualisierung ist mit der Darstellung der partiellen Summen in der Art wie im Bild meistens bereits erschöpft!



Sinusanteile einer Fourierreihe

Dabei gibt es seit langem eine hervorragende direkte Visualisierungsmöglichkeit. Vor ca. 25 Jahren demonstrierte Stuart Antis während eines Symposiums über physiologische Optik, wie die einzelnen Sinusgitter und deren partiellen Summen eines Rechteckgitters direkt dargestellt werden können. Im Prinzip zeichnete er auch nur die einzelnen Komponenten auf, aber übereinander und die Flächen unter den jeweiligen Kurven waren ausgefüllt. Im linken Bild sind die einzelnen Komponenten eines Rechteckgitters aufgezeichnet. Wenn dieses Bild durch eine sehr starke horizontal gehaltene Zylinderlinse (Maddoxzylinder) angeschaut wird, dann werden die hellen und dunklen Anteile vertikal verschmiert. Es entsteht die Überlagerung aller einzelnen Sinusgitter.

Eigenartigerweise ist diese Methode zur Darstellung des Aufbaus von Fourierreihen nie weiter ausgebaut worden. Es können auf die gleiche Weise auch beliebige andere Fourierreihen erzeugt werden. Insbesondere lässt sich der Übergang von einer Fourierreihe zur Fouriertransformation visualisieren.

## 2 Experimente mit dem Maddoxzylinder und den Folien

Der Maddoxzylinder besteht aus einer großen Anzahl von aneinandergereihten Glasstäben. Ein Durchmesser von 3mm hat sich als besonders günstig erwiesen. Die Glasstäbe werden zweckmäßigerweise in einem Bilderrahmen (etwa 9 × 13 cm) gefaßt. Sie können z. B. mit Silikon fixiert werden. Es ist unbedingt darauf zu achten, daß zwischen den einzelnen Glasstäben kein Zwischenraum bleibt, da es sonst zu Fehlabbildungen kommen kann.

Der Maddoxzylinder wirkt so, daß paralleles Licht, z. B. ein Laserstrahl, senkrecht zur Richtung der Glasstäbe aufgefächert wird und als Bild ein Strich erscheint. Wenn bei der Abbildung einer Overheadfolie vor das Projektionsobjektiv ein Maddoxzylinder gehalten wird, dann wird aus jedem Punkt ein Strich. Wenn ein Strich abgebildet wird, dann erzeugt jeder Punkt des Striches wiederum einen Strich auf der Leinwand. Diese Striche überlagern sich alle. Der Strich in der Abbildung ist zusammengesetzt aus der additiven Mischung der Farbvalenzen aller Punkte des Striches im Objekt.

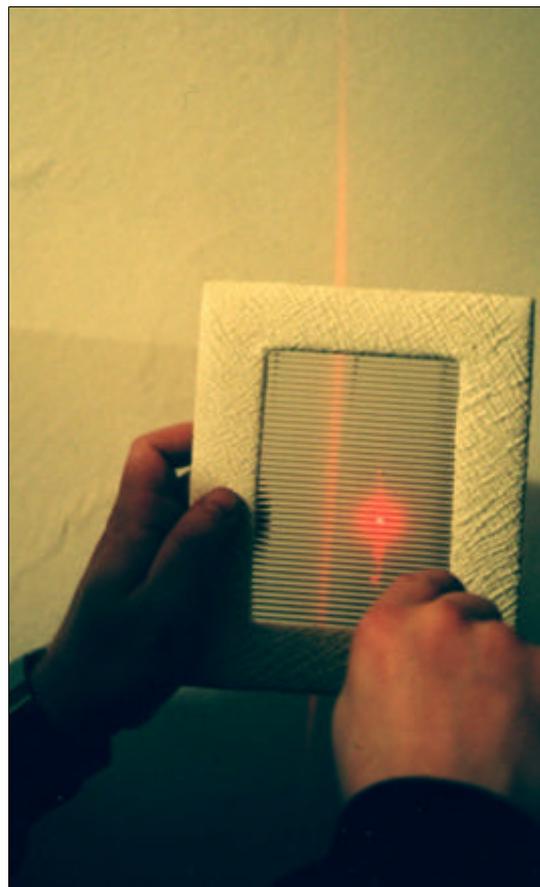


Bild 1: Maddoxzylinder  
der Laserpunkt wird zum Strich

## 2.1 Durchführung der Experimente

Die Folie I wird mit einem Overheadprojektor projiziert. Es sollen lediglich die Sinusfunktionen abgebildet werden. Der Rest der Folie wird abgedeckt.

Die Folie besteht aus 28 Zeilen. Jede Zeile enthält eine Sinus-Welle. Die Wellen sind in Amplitude und Phase so aufeinander abgestimmt, daß sie die ersten 28 Ordnungen bzw. Summanden einer Fourierreihe darstellen. Die Überlagerung der Zeilen geschieht durch den Maddoxzylinder. Er wird mit horizontal ausgerichteten Glasstäben vor das Objektiv des Overheadprojektors gehalten. Das projizierte Bild ändert sich: Die einzelnen Komponenten der Summe werden "zusammengesetzt" und es erscheint das Rechteckgitter.

Der Maddoxzylinder verzerrt die Abbildung in vertikaler Richtung, löst die vertikalen Strukturen auf und ersetzt sie durch die Gesamthelligkeit und -farbe. Ein einzelner vertikaler Streifen auf der Leinwand entspricht der additiven Mischung der Farbvalenzen aller Punkte auf dem korrespondierenden Streifen der Folie.

Da der Maddoxzylinder nur in vertikaler Richtung verzerrt, bleibt in horizontaler Richtung die Information erhalten: Die Periodizität der Folie wird übertragen.

In Bild 2 sind links (2.a) die übereinander aufgetragenen Summanden einer Fourierreihe eines Rechteckgitters (Folie I) zu sehen und rechts (2.b) das projizierte Bild nach Installation des Maddoxzylinders. Das Bild 2.b wurde direkt von der Leinwand abfotografiert.

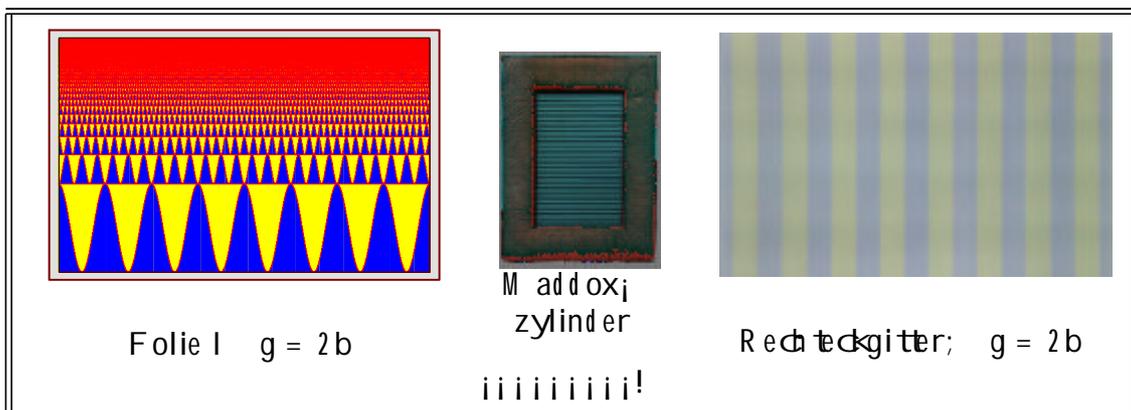


Bild 2a: Fourieranteile eines Rechteckgitters (Folie I)

2b: Das zugehörige Rechteckgitter  
(von der Leinwand abfotografiert)

## 2.2 Mathematischer Hintergrund (kann übersprungen werden)

Zur Arbeitsmappe gehört ein Skript zu Fourierreihen und zur Fouriertransformation. Dort wird ausführlich auf die Herleitung der Formeln eingegangen. Hier wird deshalb nur ganz kurz auf das Ergebnis für die vorliegende Beispielfunktion *Rechteckgitter mit den Spaltbreiten b und der Gitterkonstanten g* zurückgegriffen. Die Fourierreihe berechnet sich in der reellen Darstellung zu

$$f(x) = \frac{b}{g} + 2 \frac{b}{g} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{b}{g} k \pi}{\frac{b}{g} k} \cos 2 \frac{k}{g} x \pi$$

In den folgenden Beispielen bleibt  $b = 1$ , also :

$$f(x) = \frac{1}{g} + \frac{2}{g} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k}{g} \pi}{\frac{k}{g}} \cos 2 \frac{k}{g} x \pi \quad (1)$$

und für  $g = 2$  :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k}{2} \pi}{\frac{k}{2}} \cos 2 \frac{k}{2} x \pi \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i-1)^k}{2k+1} \cos \left( \frac{1}{2} (2k+1) x \right) \end{aligned} \quad (2)$$

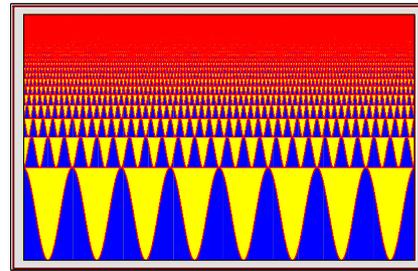
da wegen  $\sin \frac{3}{2} 2m \pi = \sin(\frac{3}{2} m \pi) = 0$  alle Koeffizienten mit  $k = \text{gerade} = 2m$  wegfallen.

### 3 Fourier - Reihen

Im folgenden werden einige Experimente mit Folie I ,  $g = 2b$ , durchgeführt. Es wird der Aufbau eines Rechteckgitters aus seinen Fourieranteilen verständlich. Anschaulich können Hochpaß, Tiefpaß, Bandpaß nachvollzogen werden. Ebenso sind besondere Effekte wie Gibb'sches Phänomen oder missing fundamental unmittelbar darstellbar.

Es wird die Folie I ,  $g = 2b$ , verwendet.

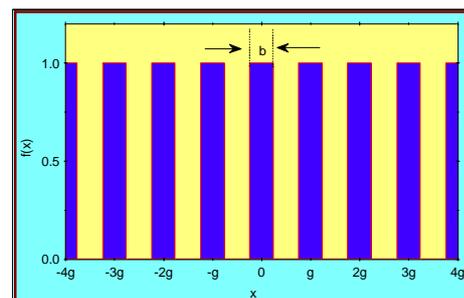
Die Folie enthält die ersten 28 Fourier - Komponenten des Rechteckgitters mit  $g = 2b$  und der Amplitude = 1.



Folie I  $g = 2b$

Wenn noch  $b = 1$  und  $g = 2$  gesetzt wird, dann lautet die Fourierreihe für diesen Sonderfall

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos\left(\frac{\pi}{2} (2k+1) x\right)$$



Rechteckgitter  $g = 2b$

Bild 3a: Fourieranteile eines Rechteckgitters  
3b: Zugehöriges Rechteckgitter

#### 3.1 Sinusgitter

Als Einführung und Vorstellung des Versuchsaufbaus wird die Grundschwingung ( $k = 1$ ) verwendet. Alle anderen Ordnungen werden abgedeckt. Die Schwingung wird projiziert und dann mit dem Maddoxzylinder die Schwingung in ein Sinusgitter umgewandelt.

Natürlich wird von der gelb-blauen Folie ein gelb-blaues Sinusgitter erzeugt. Aus darstellungstechnischen Gründen ist für die abgebildete Simulation unten und im folgenden eine rot-blau-Darstellung gewählt. Dabei entspricht rot im Sinusgitter dem gelb in der Sinuskurve.

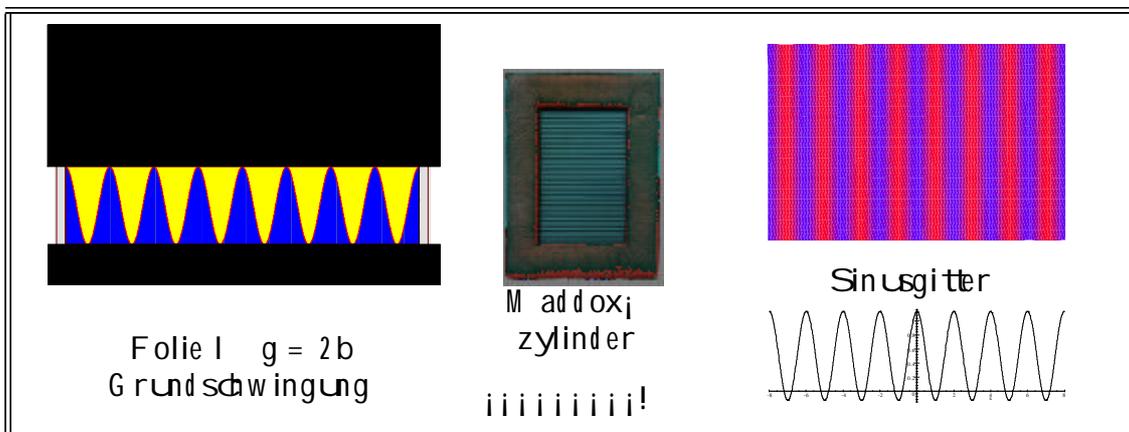


Bild 4: Die Sinusfunktion wird mit Hilfe des Maddoxzylinders zum Sinusgitter

Wenn die Abdeckungen so verschoben werden, dass nur die nächste Sinuskurve abgebildet wird, dann erzeugt der Maddoxzylinder ein Sinusgitter mit 3-facher Ortsfrequenz und niedrigerem Kontrast. So können nach und nach die einzelnen Sinusgitter angeschaut werden, die alle zusammen das Rechteckgitter erzeugen.

### 3.2 Rechteckgitter

Nun wird der Versuch wie in 2.1 beschrieben durchgeführt. Die Studenten erkennen, wie mit Hilfe des Maddoxzylinders die Komponenten der Fourierreihe des Rechteckgitters zusammengesetzt werden.

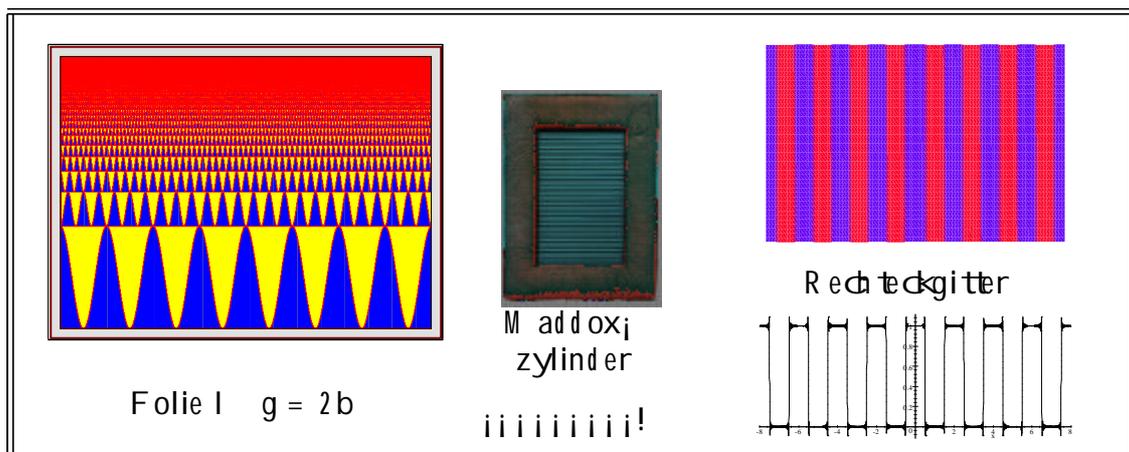


Bild 5: Rechteckgitter

### 3.3 Missing Fundamental

Durch Abdecken der Grundschwingung läßt sich das Bild verändern. Die Farbe der Balken schlägt in der Mitte um in die jeweils andere. In der Simulation ist das Zentrum des mittleren "Balkens" jetzt rötlich und bei den beiden Nachbarbalken bläulich. Die Schärfe der Ränder wird stark betont. Der Farbumschlag ist in der Profilkurve unter dem Gitter gut nachvollziehbar.

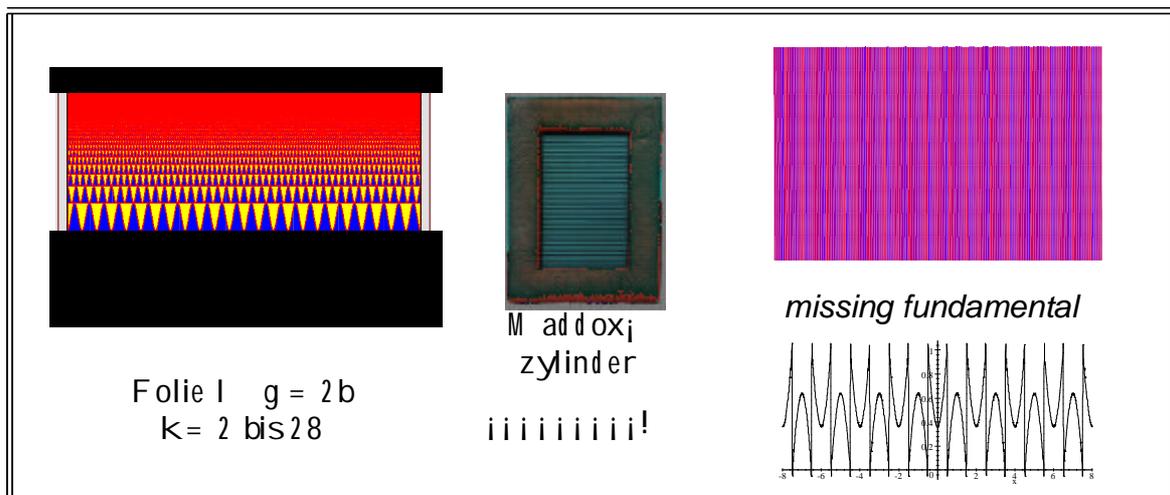


Bild 6: Missing Fundamental

Die Grundschwingung enthält neben der Grundfrequenz im Wesentlichen nur eine Helligkeitsinformation. Die Kantenschärfe bzw. Flankensteilheit des dargestellten Gitters steckt in den höheren Ordnungen.

Der beschriebene Effekt des Überschwingens an den Rändern ist aus der Physik bzw. der Nachrichtentechnik bekannt : es ist das sogenannte Gibb'sche Phänomen. Es ist der verstärkte Kontrast an den Flanken des Gitters, das "Überschwingen" der Funktion über das "Soll" hinaus. Im Zusammenhang mit Wahrnehmungstäuschungen wird dieser Effekt später noch einmal besprochen..

### 3.4 Hochpaß

Wenn nicht die Grundschwingung abgedeckt wird, sondern z. B. die unteren 5 Summanden, so ist der Effekt noch besser zu erkennen: Die Helligkeitsinformation ist gänzlich verloren gegangen, nur die Kanten sind noch sichtbar.

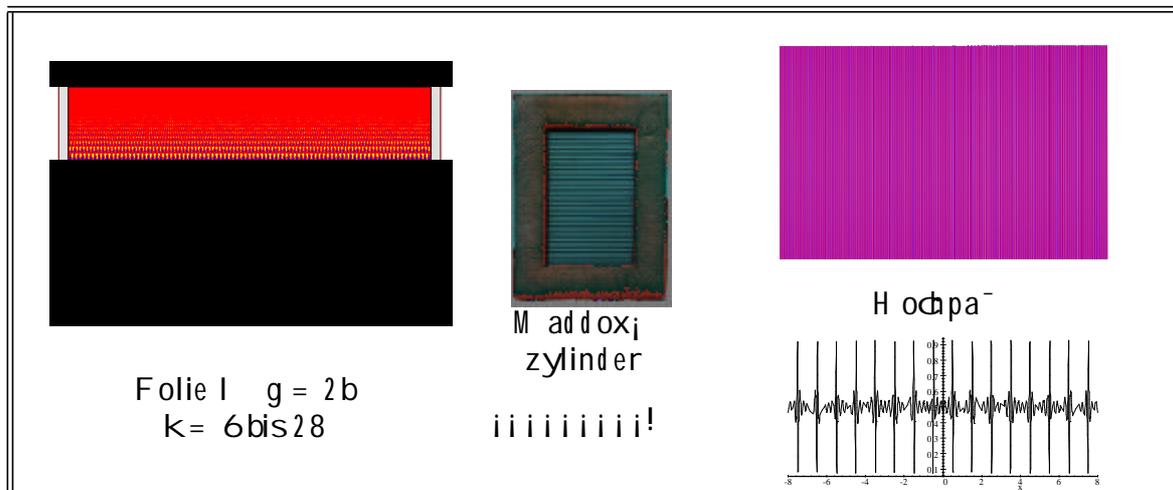


Bild 7: Hochpaß

Die niederen Ordnungen enthalten also die Informationen über die Helligkeitsverteilung des Gitters, die Bildschärfe steckt in den höheren Ordnungen

### 3.5 Tiefpaß

Eine ganz andere Wirkung wird durch das Abdecken der hohen Schwingungsordnungen erzielt. Im folgenden Bild kommen ausschließlich die ersten 5 Ordnungen zur Abbildung:

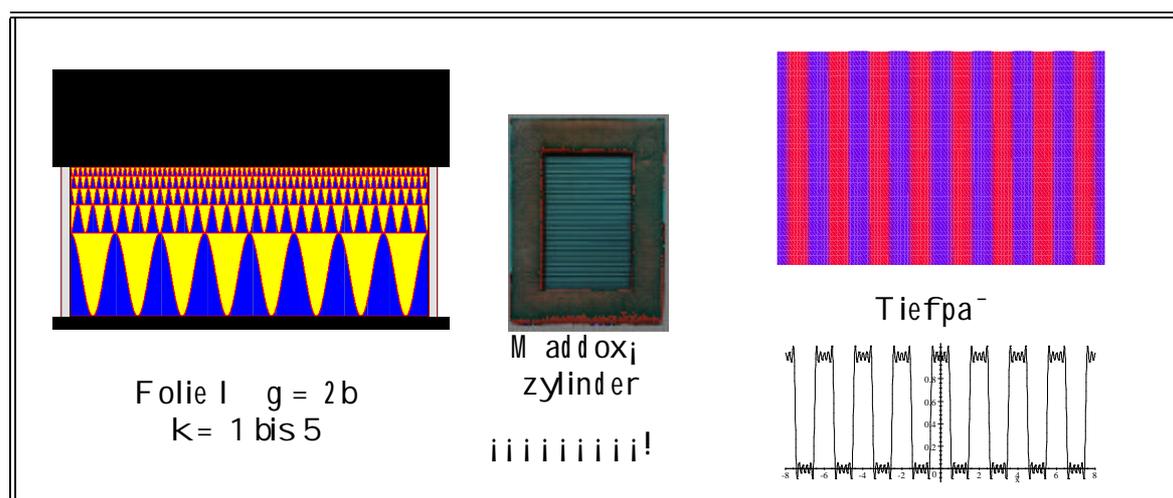


Bild 8: Tiefpaß

Auch hier kann das Überschwingen beobachtet werden, doch viel stärker fallen die unscharfen Kanten bzw. die verminderte Flankensteilheit der Gitterstruktur auf. Aber die Form ist erkennbar. Die Form des Objekts steckt in niedrigen Ortsfrequenzen.

### 3.6 Bandpaß

Eine Kombination von Hoch- und Tiefpaß ist der Bandpaß. Es werden sowohl hohe als auch niedere Ordnungen aus der Projektion entfernt. Die Ordnungen 3 bis 10 ergeben in der Summe beispielsweise dieses Bild:

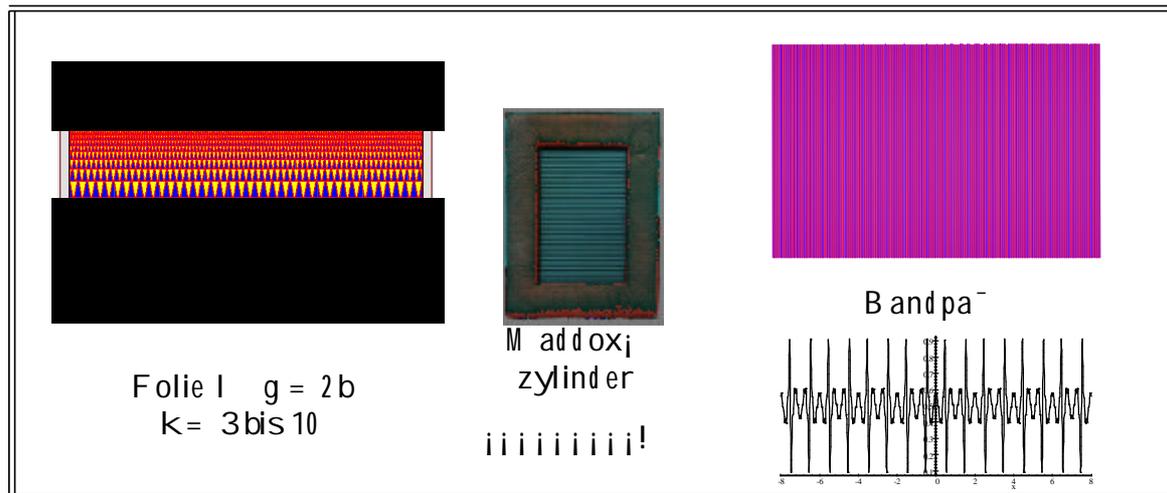


Bild 9: Bandpaß

Das Überschwingen ist zu beobachten, die Kontrastarmut und Unschärfe ebenso.

### 3.7 Dynamische Visualisierung

Nun kann der Einfluß der einzelnen Ordnungen in dynamischer Präsentation verfolgt werden. Ausgehend von der Grundschwingung (Bild 4) werden nach und nach die höheren Ordnungen dazugenommen. Auf dem Projektionsschirm werden aus den unscharfen Streifen des Sinusgitters nach und nach die scharfen Balken des Rechteckgitters.

Ebenso kann der Tiefpaß gezeigt werden, indem nach und nach die hohen Ordnungen abgedeckt werden. Das projizierte Bild wird zunehmend unschärfer.

## 4 Fouriertransformation

### 4.1 Übergang von periodischen zu aperiodischen Mustern

Fourierreihen sind mit Periodizität verbunden. Durch Vergrößerung der Periode unter Beibehaltung der Balkenbreite kann auf aperiodische Muster hingearbeitet werden. Ausgangspunkt ist die bereits bekannte Folie I,  $g = 2b$ .

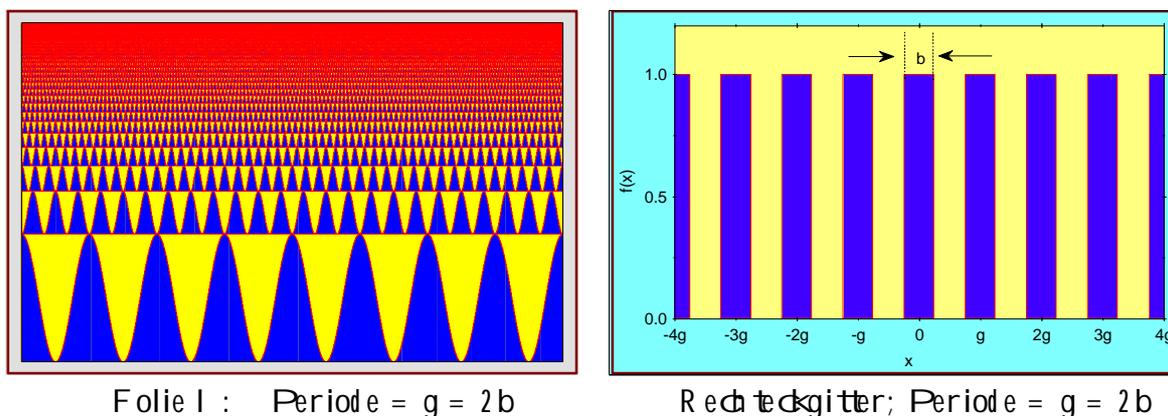


Bild 10: Das regelmäßige Rechteckgitter als Ausgangsmuster für die Fouriertransformation

Die Balkenbreite  $b$  wird beibehalten, die Periode aber vergrößert. Das wird erreicht, indem die Balken bei  $\pm g$ ;  $\pm 3g$ ;  $\pm 5g$ ;  $\dots$ ;  $\pm (2k+1)g$  ausgeblendet werden. Es bleiben nur noch die Balken bei  $0$ ;  $\pm 2g$ ;  $\pm 4g$ ;  $\dots$ ;  $\pm 2kg$ . Die Muster ändern sich dann wie folgt:

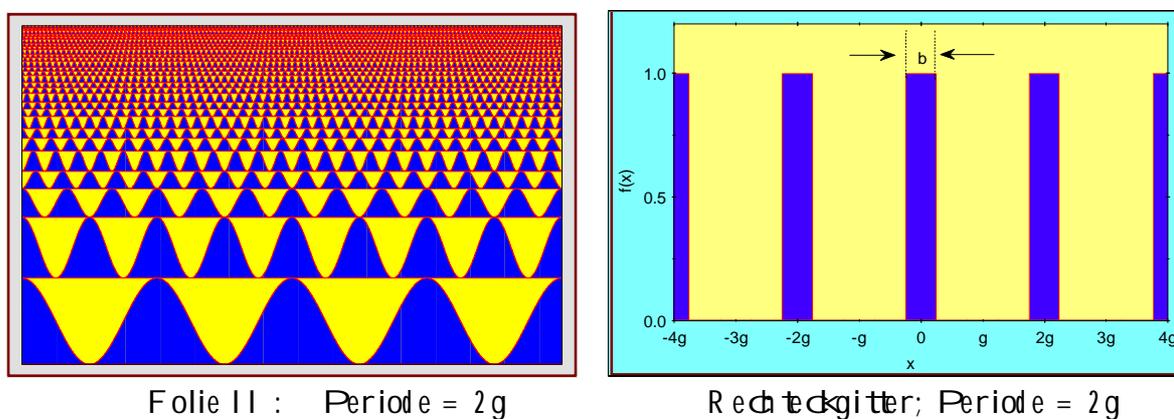


Bild 11: Jeder zweite Balken aus Bild 10 wurde entfernt. Eine Vorzeichenumkehr erfolgt erst nach jeweils 3 Ordnungen.

Auf dem Projektionsschirm ist folgende Funktion zu sehen:

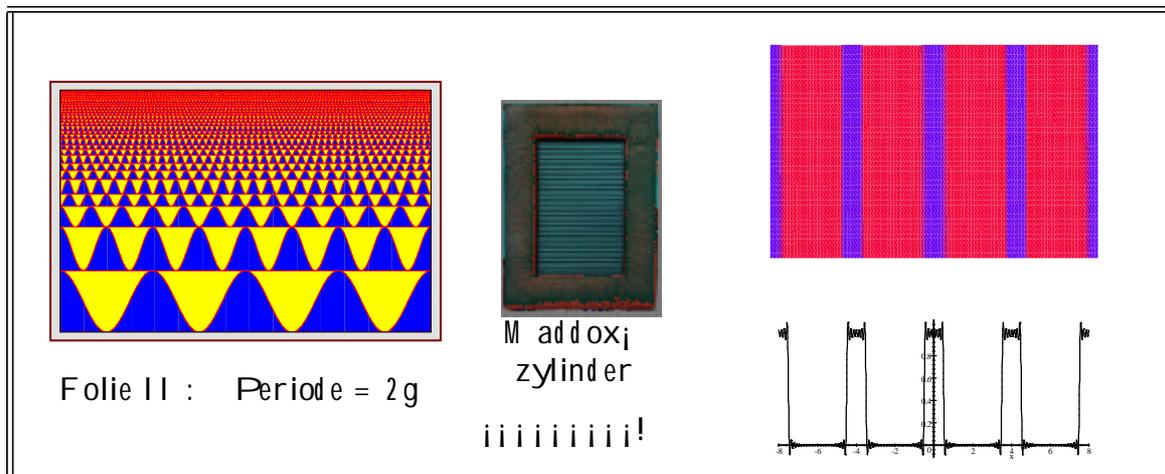


Bild 12: Doppelte Periode. Fourierkomponenten und der "Blick durch den Maddoxzylinder"

Die zugehörige Fourier Reihe ist identisch mit [1]; es muß nur die Periode  $g$  durch  $2g$  ersetzt werden::

$$f(x) = \frac{b}{2g} + 2 \frac{b}{g} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{4} \frac{b}{2g} k}{\frac{1}{4} \frac{b}{g} k} \cos 2 \frac{1}{4} \frac{k}{2g} x \quad \text{Periode} = 2g$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{\frac{1}{4}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin i \frac{1}{4} \frac{k}{4}}{k} \cos 2 \frac{1}{4} \frac{k}{4} x \quad \text{für } b = 1; g = 2:$$

## 4.2 Ortsfrequenz

In Folie II sind von der Grundschwingung nur noch 4 statt der 8 Perioden in Folie I sichtbar. Die Anzahl der Perioden pro Längeneinheit heißt Ortsfrequenz.

$$f_0 = \text{Ortsfrequenz} = \frac{\text{Anzahl der Perioden}}{\text{Längeneinheit}} = \frac{1}{\text{Periodenlänge}}$$

da die Periodenlänge wiederum identisch ist mit Längeneinheit = Anzahl der Perioden: Folie I gehört zu dem Rechteckgitter  $g = 2b$ . Die Längeneinheit ist die Spaltbreite  $b$ . Die Ortsfrequenz berechnet sich dann zu  $f_0 = \frac{1}{g} = \frac{1}{2b} = \frac{1}{2}$ ; wenn  $b = 1$  gesetzt wird. In Folie II ist die Periodenlänge verdoppelt, die Grundfrequenz ist also  $f_0 = \frac{1}{2g} = \frac{1}{4b} = \frac{1}{4}$  für  $b = 1$ : Die zweite Funktion in Bild 11 hat die halbe Periodenlänge der Grundfrequenz, also offenbar die doppelte Ortsfrequenz. Weiter ist leicht abzuzählen, daß die dritte Kurve die 3-fache, die vierte Kurve aber die 5-fache Ortsfrequenz hat, da 3 bzw. 5 Perioden in eine Schwingung der Grundfrequenz passen. Wenigstens für

$k = 1$  bis  $3$ , also für die ersten 3 Kurven ist offenbar

$$f_{0k} = kf_{0F}$$

wobei mit  $f_{0F}$  die Ortsfrequenz der Grundschwingung (Fundamental) gemeint ist (Für  $k > 3$  siehe Abschnitt Amplituden). Die Funktionen  $f_k(x) = \cos 2\frac{1}{4}\frac{k}{2g}x$  können also auch so geschrieben werden:  $f_k(x) = \cos(2\frac{1}{4}kf_{0F}x)$ : Im vorliegenden Fall, Folie II, ist  $f_{0F} = \frac{1}{2g}$ :

An den Stellen  $g$ , der Periode in Folie I, hat die neue Grundschwingung (Folie II) ein Minimum, denn für  $k = 1$  und  $x = g$  folgt:

$$\cos 2\frac{1}{4}\frac{k}{2g}x = \cos 2\frac{1}{4}\frac{1}{2g}g = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

### 4.3 Amplituden

Auffallender noch als die Zusammensetzung der Ordnungen ist der Verlauf der Amplituden zu den höheren Ordnungen hin. In der Folie I erfolgt von Reihe zu Reihe ein Vorzeichenwechsel. Von einer Spitze der Grundschwingung ausgehend (blau) folgt gelb, dann blau, gelb, blau usw mit der Amplitudenfolge

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{4}\frac{k}{2}}{k} = 1; 0; \frac{1}{3}; 0; \frac{1}{5}; 0; \frac{1}{7}; 0; \dots$$

In der Formel weiter oben für das Rechteckgitter (Bild 4) tauchen deshalb nur die ungeraden  $k$  auf.

Der Faktor  $\frac{2}{\frac{1}{4}}$  vor dem Summenzeichen ist ein konstanter Faktor für alle Amplituden. Wenn nur wie hier der Abfall der Amplituden relativ zur Grundfrequenz betrachtet wird, dann kann der Faktor auch weggelassen werden.

In der Folie II ist die Reihenfolge blau, blau, blau, gelb, gelb, gelb usw. mit den (relativen) Amplituden

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{4}\frac{k}{4}}{k} = \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 0; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; 0; \frac{1}{9}; \dots$$

$$t = 0; 7; 0; 5; 0; 24; 0; 0; 14; 0; 17; 0; 10; 0; 0; 8; \dots$$

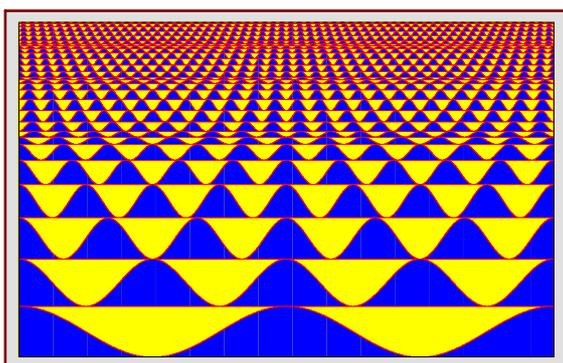
Die Grundschwingung ( $k = 1$ ) hat von vornherein eine kleinere Amplitude ( $\frac{\sin^2 \frac{1}{4}\frac{k}{4}}{k} = 0; 7$ ). Im Gegensatz zu Folie I fällt jede vierte Reihe aus (Amplitude =  $\frac{\sin^2 \frac{1}{4}\frac{k}{4}}{k} = 0$  für  $k = 4m$ ;  $m \in \mathbb{N}$ ). Deshalb folgt in Bild 11 auf die 3-fache Frequenz gleich die 5-fache. Das Bild scheint "Wellen" in der "Tiefe" zu haben, denn ab  $k = 5$  kehren sich die Vorzeichen um. Übrigens kann "Tiefe" hier wirklich auftreten. Wer die Technik beherrscht, Magic Eye Bilder in 3D anzuschauen, kann diesen Tiefeneindruck auch mit diesen Mustern erzeugen. Es sind dann räumliche Felder der Sinusfunktionen sichtbar.

Von dieser Reihe werden mehr Ordnungen gebraucht, um genauso scharfe Ränder zu erzeugen wie bei  $g = 2b$ . Den Umkehrschluß erkennt man im Experiment mit dem

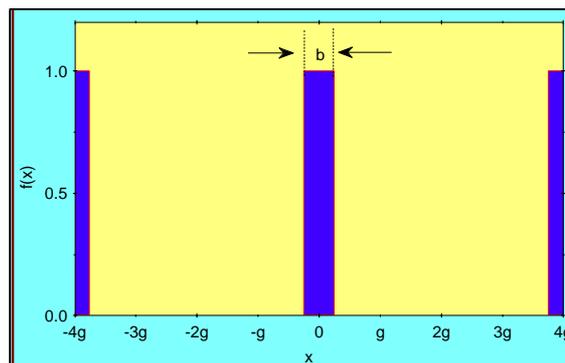
Maddoxzylinder: Die Flankensteilheit und damit auch die Schärfe ist geringer. Das Bild 13 rechts oben ist zu klein, um diese Unschärfe schon zu sehen. Erst in der wirklichen Projektion der Folie II wird die Unschärfe sichtbar.

#### 4.4 Weitere Vergrößerung der Periode

Noch deutlicher ist dieser Effekt, wenn über das bisherige hinaus auch die Balken bei  $\pm 2g$ ;  $\pm 6g$ ;  $\pm 10g$ ; ... ausgeblendet werden, so daß lediglich die Balken bei  $0$ ;  $\pm 4g$ ;  $\pm 8g$ ;  $\pm 12g$ ; ... übrig bleiben.



Folie III : Periode =  $4g$



Rechteckgitter; Periode =  $4g$

Bild 13: Jeder zweite Balken aus Bild 11 wurde entfernt  
Vorzeichenumkehr erst alle sieben Ordnungen

Die Reihe, die dieser Funktion zu Grunde liegt, ist gegeben durch:

$$f(x) = \frac{1}{4g} + \frac{2}{g} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{4} \frac{k}{g} x}{k} \cos 2 \frac{k}{g} x$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{2}{g} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{8} \frac{k}{g} x}{k} \cos 2 \frac{k}{g} x \quad \text{für } g = 2$$

Erst bei  $k = 8$  ist der Umschlagpunkt des Vorzeichens erreicht. Da die Folie 28 Komponenten der Reihe enthält, sind nur 3 Vorzeichenwechsel zu sehen. Die Abbildung durch den Maddoxzylinder fällt entsprechend unschärfer aus. Rechts im Bild 14 sind alle 28 auf der Folie III (Links im Bild 14) dargestellten Ordnungen berücksichtigt:

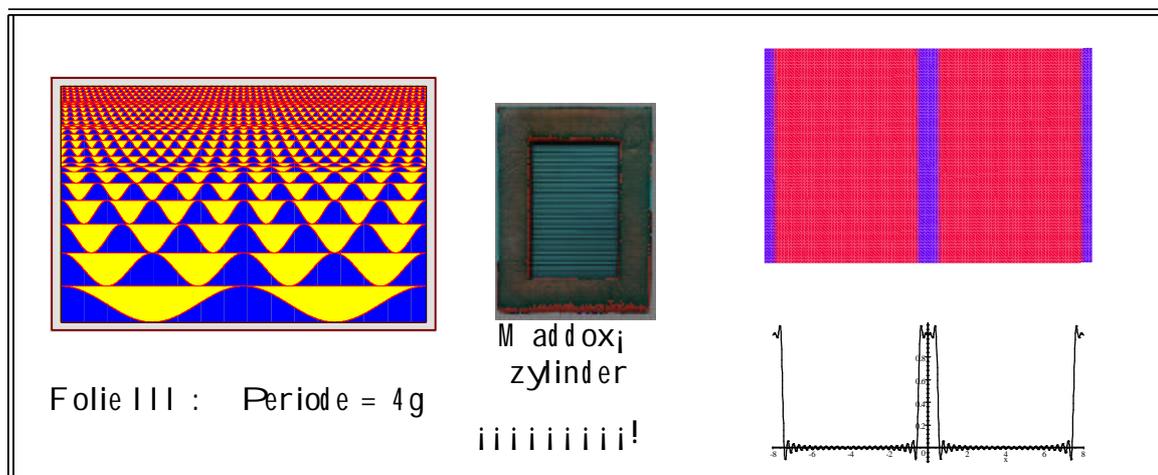


Bild 14: Vierfache Periode. Fourieranteile und der "Blick durch den Maddoxzylinder"

Sehr interessant ist hier die dynamische Entwicklung von der Grundschwingung zum kompletten Bild: Mit jeder neu dazukommender Ordnung erscheint ein neuer, schwacher Balken. Der Kontrast dieser "neuen" Balken nimmt allerdings mit weiter steigender Ordnung ab, denn nach der Vorzeichenumkehr werden diese Streifen wieder "abgebaut" bis sie ganz verschwinden wie in Bild 14. Der Effekt ist im Bild 15 abgebildet als Tiefpaß mit 4 Ordnungen.

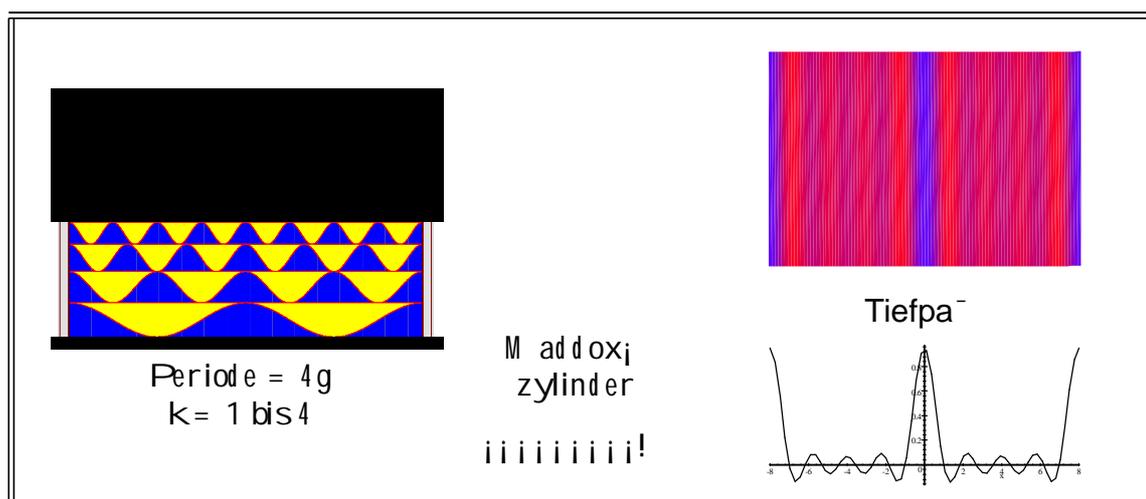
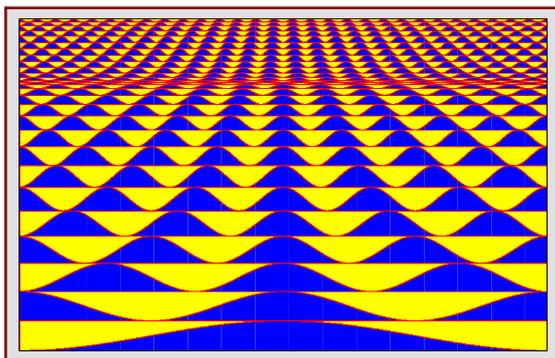
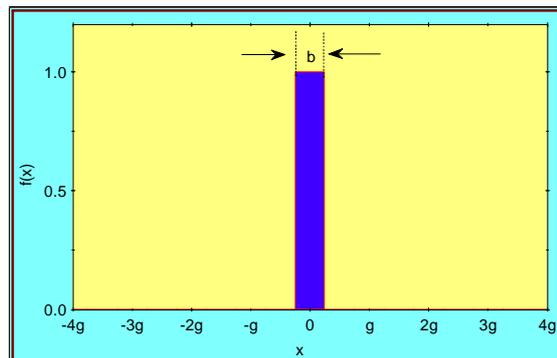


Bild 15: Fourieranteile und der "Blick durch den Maddoxzylinder"

Scheinbar komplett aperiodisch wird es, wenn auch noch die Balken bei  $\pm 4g$ ;  $\pm 12g$ ; ... entfernt werden, denn dann liegt der nächste Balken weit außerhalb des Bildrahmens.



Folie IV : Periode = 8g



Rechteckgitter; Periode = 8g

Bild 16: Jeder zweite Balken aus Bild 13 wurde entfernt. Vorzeichenumkehr erst nach 16 Ordnungen.

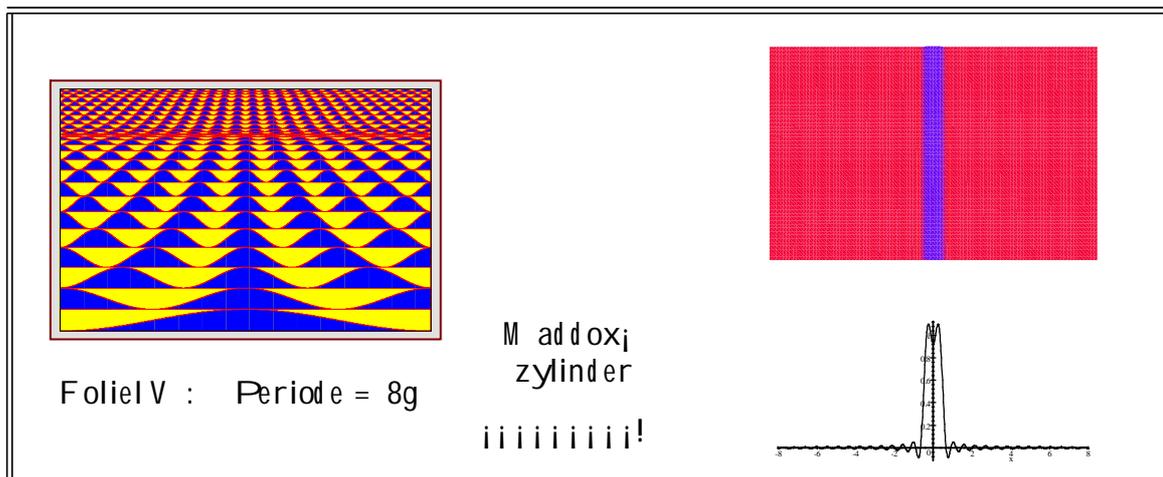


Bild 17: Achtfache Periode. Fourieranteile und der "Blick durch den Maddoxzylinder"

Die zugehörige Fourierreihe ergibt sich völlig analog zu den vorangehenden Reihen zu:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{8g} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{4} \frac{k}{8g} \pi}{k} \cos 2 \frac{1}{4} \frac{k}{8g} x \\
 &= \frac{1}{2 \cdot 3g} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{4} \frac{k}{2 \cdot 3g} \pi}{k} \cos 2 \frac{1}{4} \frac{k}{2 \cdot 3g} x \\
 &= \frac{1}{16} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{16} k \pi}{k} \cos 2 \frac{1}{4} \frac{k}{16} x \quad \text{für } g = 2
 \end{aligned}$$

Die beschriebenen Unschärfe - Effekte werden noch stärker. Deutlich ist bei dieser Anzahl von Ordnungen (k = 1 bis 28) ein "Einbruch" inmitten des Balkens sichtbar. Die 28 Komponenten der Fourierreihe reichen nicht mehr aus, um ein scharfes Bild

des Balkens zu erzeugen. Zum Vergleich: in Folie I hatte die 28.te Sinusfunktion die Amplitude  $\frac{1}{2 \cdot 28 \cdot 1} = \frac{1}{56}$ , bezogen auf die Grundschwingung. Hier liegen die Ortsfrequenzen und Amplituden viel dichter beieinander. Die 24ste Schwingung hat mit  $\frac{\sin \frac{1}{4} \frac{24}{16}}{24} = \frac{1}{24}$  mehr als die doppelte Amplitude. Es müssten also wesentlich mehr Komponenten herangezogen werden, um die gleiche Schärfe zu erreichen.

### 4.5 Grenzfall Fouriertransformation

Dieser Prozess, jeweils jeden zweiten Balken eliminieren, kann beliebig fortgesetzt werden. Die Sinusgitter mit den Ortsfrequenzen  $f_{0k} = \frac{k}{2^{ng}}$ ; aus denen die Rechteckgitter zusammengesetzt sind, liegen immer enger beieinander. Mit wachsendem n wird  $f_{0k} = \frac{k}{2^{ng}}$  zu einer mehr und mehr stetigen Variablen  $f_0$  (Ortsfrequenz). Der einzel stehende Balken  $f_B(x)$  ergibt sich als Grenzwert dieses Prozesses:

$$f_B(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2^{ng}} + \sum_{k=1}^{2^{ng}-1} \frac{\sin \frac{1}{4} \frac{k}{2^{ng}}}{k} \cos 2 \frac{1}{4} \frac{k}{2^{ng}} x \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^{ng}-1} \frac{\sin \frac{1}{4} \frac{k}{2^{ng}}}{k} \cos 2 \frac{1}{4} \frac{k}{2^{ng}} x$$

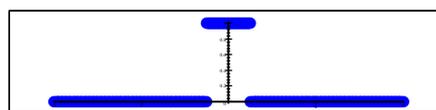
Wächst k um 1, so wächst  $f_0 = \frac{k}{2^{ng}}$  um  $\Delta f_0 = \frac{1}{2^{ng}}$ : wenn diese Bezeichnungen in  $f_B(x)$  eingeführt werden, dann folgt

$$\sum_{k=1}^{2^{ng}-1} \frac{\sin \frac{1}{4} \frac{k}{2^{ng}}}{k} \cos 2 \frac{1}{4} \frac{k}{2^{ng}} x = \sum_{k=1}^{2^{ng}-1} \frac{\sin \frac{1}{4} \frac{k}{2^{ng}}}{\frac{1}{4} \frac{k}{2^{ng}}} \cos 2 \frac{1}{4} \frac{k}{2^{ng}} x \cdot \frac{1}{2^{ng}}$$

$$= \sum_{k=1}^{2^{ng}-1} \frac{\sin(\frac{1}{4} f_0)}{\frac{1}{4} f_0} \cos(2 \frac{1}{4} f_0 x) \Delta f_0$$

Die Summe  $\sum_{k=1}^{2^{ng}-1} \frac{\sin \frac{1}{4} \frac{k}{2^{ng}}}{k} \cos 2 \frac{1}{4} \frac{k}{2^{ng}} x$  geht für  $n \rightarrow \infty$  über in

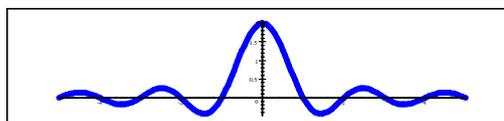
$$f(x) = \int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{4} f_0)}{\frac{1}{4} f_0} \cos(2 \frac{1}{4} f_0 x) df_0$$



$f(x) =$  Einzeller Balken

Das ist das Fourierintegral für den Einzelspalt mit  $b = 1$ . Die Fouriertransformation der Spaltfunktion ist.

$$F(f(x)) = 2 \frac{\sin(\frac{1}{4} f_0)}{\frac{1}{4} f_0}$$



Fouriertransformation von  $f(x)$

## 5 Optische Täuschungen

Kontrast ist etwas, was zum einen wahrnehmbar, zum anderen meß- bzw. berechenbar ist. Daß das eine nicht gleich dem anderen ist, zeigt sich bei den folgenden Experimenten.

### 5.1 Stufenfunktion (Mach'sche Streifen)

Es wird die Folie V verwendet:

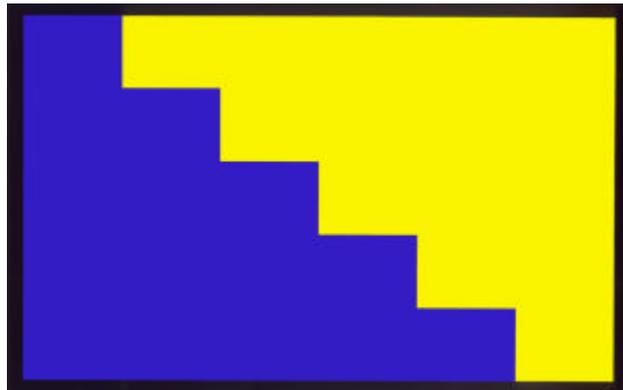


Bild18: Folie V Stufenfunktion

Diese Folie wird mit einem Overheadprojektor abgebildet, die Bereiche außerhalb des gelb-blauen Musters werden abgedeckt, so daß sie nicht mit abgebildet werden. Der Maddoxzylinder wird vor die Objektivlinse gehalten. Aus dem Stufenmuster wird ein Streifenmuster. Innerhalb jedes Streifens scheint es ein Helligkeitsgefälle zu geben. Die Seite des Streifens, die dem helleren Nachbarstreifen zugewandt ist, erscheint dunkler zu sein als die andere Seite

Sie erscheint allerdings nur dunkler, ist es in Wirklichkeit aber nicht. Die Wahrnehmung wird getäuscht. Daß dem so ist, läßt sich zeigen:

1. Ein Streifen wird durch die Überlagerung der Helligkeiten einer (blauen) Stufe mit der Helligkeit der darüberliegenden (gelben) Säule gebildet. Über die komplette Breite der Stufe ist das Verhältnis blau zu gelb gleich. Daher kann es innerhalb eines Streifens keine Helligkeitsunterschiede geben.
2. Die Folie wird so abgedeckt, daß nur noch eine Stufe abgebildet wird:

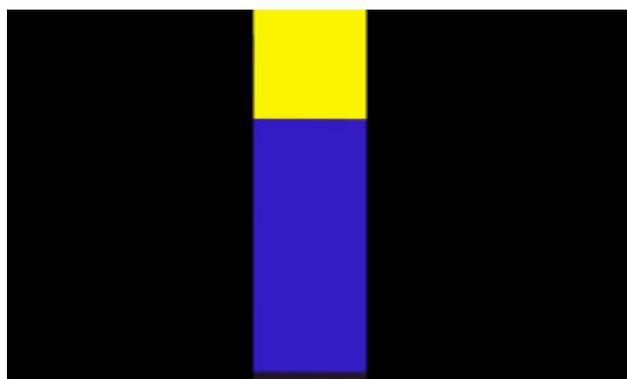


Bild 19: Abgedeckte Stufenfunktion

Die so abgedeckte Folie wird durch den Maddoxzylinder projiziert. Das Ergebnis ist, daß alles bis auf einen Streifen ausgeblendet ist. Dieser eine Streifen hat jetzt über die komplette Breite eine gleichbleibende Helligkeit. Werden die Abdeckungen wieder entfernt, so stellt sich wieder der alte Effekt ein, daß innerhalb eines Streifens ein Helligkeitsgefälle vorhanden zu sein scheint.

### Erklärung:

Wenn im visuellen System zur Mustererkennung auch so etwas wie eine Fourieranalyse stattfindet, dann ist es kein Wunder, daß wir dieser Täuschung unterliegen. Wir sind für die mittleren Ortsfrequenzen empfindlicher als für hohe bzw. niedrige Ortsfrequenzen - entsprechend einer Bandpaßfilterung. Kanten brauchen sehr hohe Fourieranteile, um scharf zu sein. Sie werden mit weniger Anteilen gesehen - also Tiefpaßgefiltert. Die daraus resultierende "Unschärfe" - das Überschwingen - bewirkt die Kontrastüberhöhung der Kanten. Das Gibb'sche Phänomen findet auch im Gehirn statt und wird dort Mach'sche Streifen genannt.

## 5.2 Cornsweet Illusion

Es wird die Folie VI verwendet:

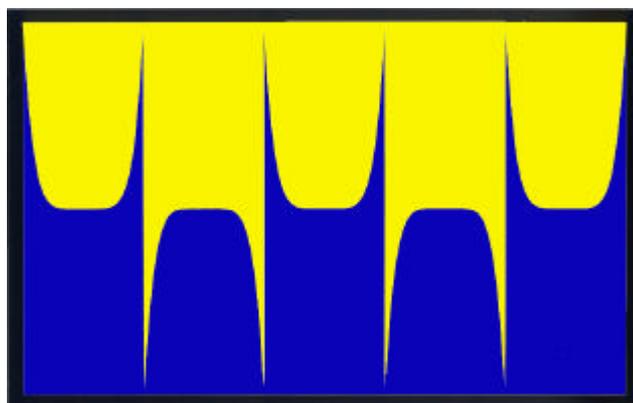


Bild 20: Folie VI Cornsweet Illusion

Diese Folie wird mit einem Overheadprojektor abgebildet, die Bereiche außerhalb des gelb-blauen Musters werden abgedeckt, so daß sie nicht mit abgebildet werden. Der Maddoxzylinder wird vor die Objektivlinse gehalten. Es entsteht ein Streifenmuster. Die Streifen sind so aufgebaut, daß sich in der Mitte ein gleichmäßig heller Bereich befindet. Zu den Rändern des Streifens hin wird er entweder dunkler oder heller. Die Streifen liegen so nebeneinander, daß auf einen Streifen mit dunklem Rand stets ein Streifen mit hellem Rand folgt und umgekehrt.

Der interessante Bereich ist hier der zentrale Bereich eines jeden Streifens. Der zentrale Bereich eines Streifens mit hellem Rand erscheint heller als der zentrale Bereich eines Streifens mit dunklem Rand. Wieder erscheint es nur so. Das läßt sich wieder mit zwei Methoden zeigen:

1. Ein Streifen wird durch die Überlagerung der Helligkeiten der blauen Seite mit der Helligkeit der gelben Seite gebildet. Im mittleren Bereich eines jeden Streifens ist das Verhältnis blau zu gelb stets gleich. Daher kann es im zentralen Bereich keine Helligkeitsunterschiede zwischen den Streifen geben.
2. Es wird die Folie mittels der beiliegenden Abdeckung (Folie VII) so abgedeckt, daß nur noch die mittleren Bereiche abgebildet werden:

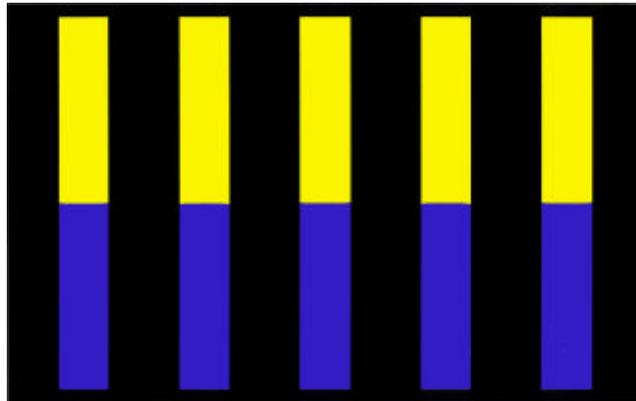


Bild 21: Folie VI + VII Cornsweet Illusion mit Abdeckung

Die so abgedeckte Folie wird durch den Maddoxzylinder projiziert. Es werden jetzt nur noch die Mitten jedes Streifens dargestellt.

Alle Streifen dieser mittleren Bereiche haben die selbe Helligkeit. Wird die Abdeckungen wieder entfernt, so stellt sich wieder der alte Effekt ein. Die Zentren der nun wieder breiteren Streifen scheinen unterschiedliche Helligkeit zu haben.

### Erklärung:

Dem visuellen System wird ein Muster vorgetäuscht, daß eigentlich zu einem Rechteckgitter paßt. Das visuelle System ist aber während seiner Entwicklung kaum mit Mustern konfrontiert worden, denen die Grundfrequenz fehlt. Deshalb kommt es zur "Fehlinterpretation", das Gehirn ergänzt die fehlende Grundfrequenz. Die dunkel umrandeten Streifen erscheinen dunkler, die hell umrandeten heller.

Diesen Effekt findet man auch in der Akustik. Wenn ausschließlich die Oberschwingungen eines Klages dargeboten werden, so hören wir den Klang in einer Tonhöhe, die der fehlenden Grundfrequenz entspricht.

### 5.3 Hermanngitter (Ludimar Hermann 1870)

Im Jahre 1870 beschrieb der Schweizer Physiologe Ludimar Hermann eine Anordnung aus schwarzen Quadraten und weißen Linien, die heute zu den bekanntesten optischen Täuschungen zählt: das Hermanngitter.

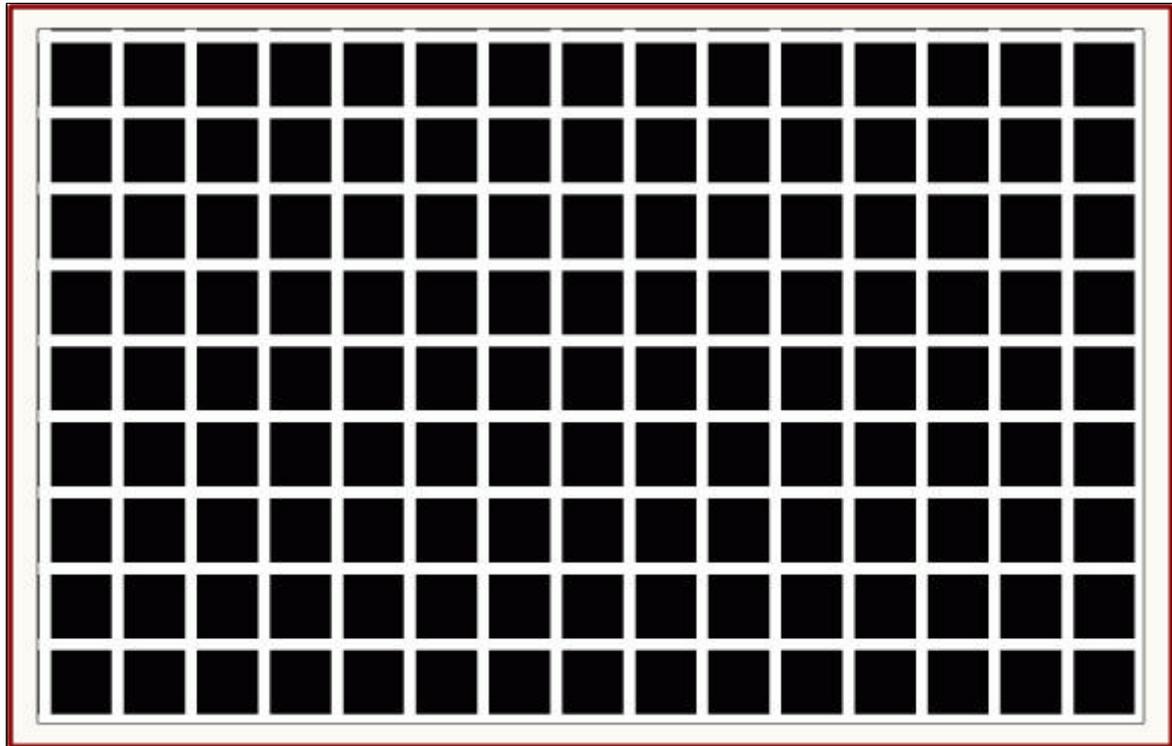


Bild 22: Hermanngitter

Die Kreuzungen der Linien erscheinen dunkler als der Rest der Linien. Ein Erklärungsansatz ist: Das visuelle System zerlegt Objekte in seine Fourieranteile. Nun sind aber beim Hermanngitter in den Diagonalen "dunkle" Fourierkomponenten enthalten. Die Summe der Diagonalelemente kann mit dem Maddoxzylinder sichtbar gemacht werden, wenn er um  $45^\pm$  gedreht vor das Objektiv des Projektors gehalten wird. Es können auch weitere Komponenten gefunden werden.

#### 5.4 Scintillating Grid

Hier handelt es sich um eine Modifikation des Hermanngitters. Diese Täuschung wurde 1994 von Elke Lingelbach entdeckt. 1995 stellten Elke und Bernd Lingelbach, zusammen mit Michael Schrauf und Eugene Wist, die Täuschung bei der Tagung der ECVP (European Conference on Visual Perception) in Tübingen vor. Die versammelten Experten wußten alle, wie sich die Täuschung **nicht** erklären läßt, aber keiner konnte sie erklären. Daran hat sich bis heute nichts geändert. Die "Probe" mit dem Maddoxzylinder zeigt, daß hier ein Ansatz der Art: "das visuelle System macht eine Fourieranalyse des Objekts" nicht weiterhilft.

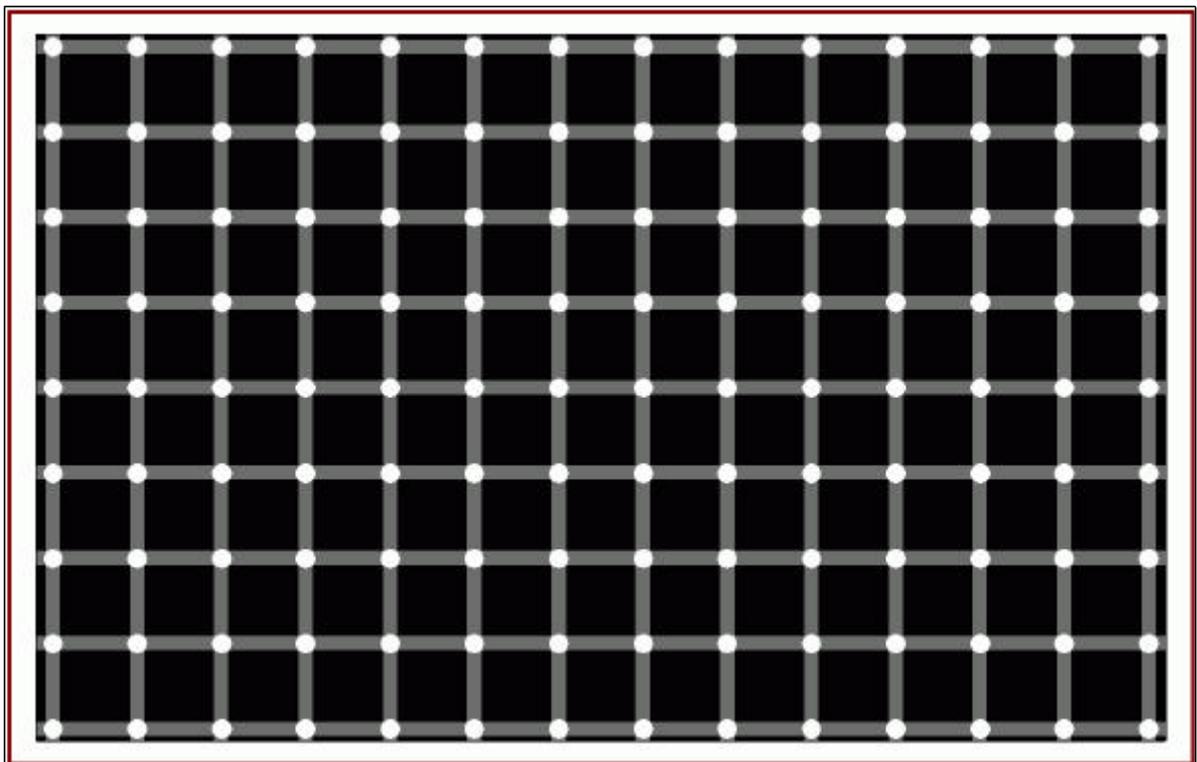


Bild 23: Scintillating Grid.  
Der Effekt wurde 1994 von Elke Lingelbach entdeckt

## 6 Eine Übungsaufgabe

### 6.1 Die Aufgabe

1. Zeichnen Sie nacheinander folgende Funktionen in das selbe Koordinatensystem.

a)  $f_0(x) = \frac{1}{2}$     b)  $f_1(x) = \frac{2}{4} \cos(\frac{1}{4}x)$     c)  $f_3(x) = \frac{2}{4} \cos(\frac{3}{4}x)$

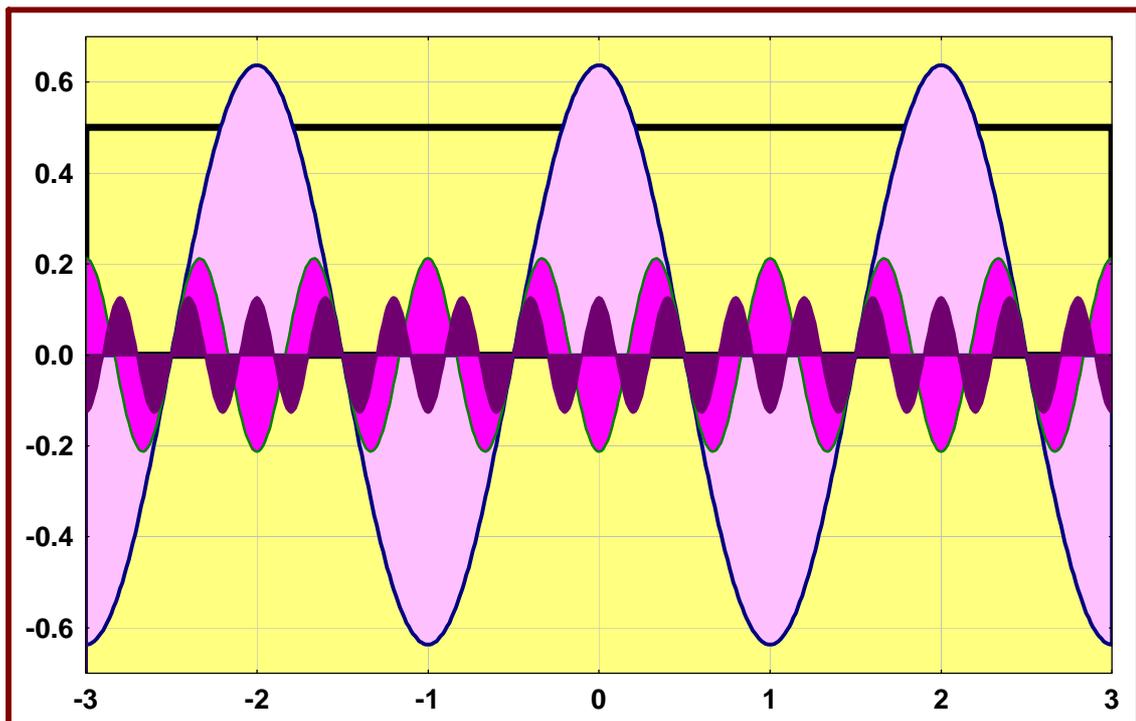
d)  $f_5(x) = \frac{2}{4} \cos(\frac{5}{4}x)$

2. Zeichnen Sie die folgenden Summen in jeweils ein neues Koordinatensystem:

a)  $f_0 + f_1$     b)  $f_0 + f_1 + f_3$     c)  $f_0 + f_1 + f_3 + f_5$

### 6.2 Die Lösung

1. Lösung zu Aufgabe 1:



$f_0; f_1; f_3; f_5$

## 2. Lösungen zu Aufgabe 2:

