

ARBEITSKREIS BAYERISCHER PHYSIKDIDAKTIKER

BEITRAG AUS DER REIHE:

Werner B. Schneider (Hrsg.)

Wege in der Physikdidaktik

Band 3

Rückblick und Perspektive

ISBN 3 - 7896 - 0513 - 1

Verlag Palm & Enke, Erlangen 1993

Anmerkung:

Die Bände 1 bis 5 sind (Ausnahme Band 5) im Buchhandel vergriffen.
Die einzelnen Beiträge stehen jedoch auf der Homepage

<http://www.solstice.de>

zum freien Herunterladen zur Verfügung.

Das Copyright liegt bei den Autoren und Herausgebern.

Zum privaten Gebrauch dürfen die Beiträge unter Angabe der Quelle
genutzt werden. Auf der Homepage

www.solstice.de

werden noch weitere Materialien zur Verfügung gestellt.

WELTNER, Klaus, Universität Frankfurt

ESPIRIDIAO, Sergio, Universidade Federal da Bahia, Salvador

Der mechanische Oszillator als Zugang zur Behandlung nichtlinearer Phänomene

Meinem Kollegen H. Schramm mit guten Wünschen zum 60. Geburtstag gewidmet.

1. Physik der linearen und der nichtlinearen Phänomene

Die Schönheit und Eleganz der klassischen Physik, insbesondere der Mechanik, beruhen zu einem Teil darauf, daß die Komplexität der natürlichen Phänomene in kunstvoller Weise reduziert wurde. Vorgänge die in aller Regel von vielen Variablen abhängen, wurden zu "reinen Fällen" umgeformt, in denen die Einflüsse der meisten Variablen ausgeschaltet wurden um nun desto besser die Zusammenhänge zwischen ausgewählten Variablen zu studieren. Darüberhinaus erwies es sich als außerordentlich fruchtbar, kompliziertere Zusammenhänge durch Näherungsansätze zu beschreiben. Das klassische Beispiel dafür ist die Behandlung der Pendelschwingung. Für den Fall, daß die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist, lassen sich die Differentialgleichungen bereits im Schulunterricht lösen. Für diesen Fall gilt, daß die Schwingungsdauer unabhängig von der Schwingungsamplitude ist. Bekanntlich ist dieser Fall beim Federpendel gegeben, doch schon beim einfachen Schwebpendel ist das rücktreibende Drehmoment nicht proportional zum Auslenkungswinkel sondern proportional zu dessen Sinus. Die entsprechende Differentialgleichung führt auf schwierige mathematische Probleme, auf elliptische Integrale, und darum macht man sowohl in der Schule wie im Physik-Studium tunlichst einen großen Bogen. Dies ist deshalb gerechtfertigt, weil für kleine Winkel der Sinus näherungsweise durch den Winkel ersetzt werden kann. Dieser Näherungsansatz führt jetzt wieder auf die bekannte lösbare lineare Differentialgleichung. Die Unabhängigkeit der Schwingungsdauer eines Pendels vom Pendelausschlag gilt in einem weiten Bereich, und erst bei größerem Schwingungsamplituden werden die Abweichungen deutlich. Es gehört zu den Übungsaufgaben im physikalischen Praktikum, mit Hilfe elektronischer Stoppuhren die Abweichungen zu messen, die mit normalen Stoppuhren bei "vernünftigen" Ausschlägen nicht aufgedeckt werden können. Diese Methodik, bestimmte funktionale Zusammenhänge innerhalb begrenzter Gültigkeitsbereiche durch lineare Zusammenhänge zu beschreiben, hat sich in Physik und Technik ganz außerordentlich bewährt. Seit geraumer Zeit allerdings wendet sich die Forschung in zunehmendem Maße der Untersuchung von Zusammenhängen zu, die durch nichtlineare Gleichungen beschrieben werden müssen. Auf der einen Seite zeigt sich hier nun, daß neue Phänomene ins Blickfeld treten und auf der anderen Seite zeigt sich, daß eine Vielzahl von Systemen zu einem Verhalten neigt, das

wir als "chaotisches Verhalten" beschreiben. Charakteristisch dafür ist, daß im Bereich chaotischen Verhaltens keine langfristigen Prognosen möglich sind. Dies ist auch dann nicht möglich, wenn alle wirkenden Zusammenhänge streng deterministisch und kausal formuliert werden können. Es geht hier um den prinzipiellen Unterschied zwischen der Vorhersage der Planetenbahnen, dies ist über Jahrhunderte hinweg möglich und der Unmöglichkeit, das Wetter auch nur eine Woche lang mit Sicherheit zu prognostizieren.

Da auch der Physikunterricht auf diese Verschiebung der Gewichte reagieren sollte, ist es sinnvoll, nach verständlichen Zugängen zu der Physik nichtlinearer Phänomene zu suchen, um daran den speziellen Charakter der linearen Approximation und den Reichtum der nichtlinearen Phänomene zu demonstrieren.

Im folgenden werden einige Versuche an einem mechanischen Pendel vorgeschlagen, die von den wohlbekanntem und einfachen Eigenschaften des linearen Oszillators ausgehen und zu unerwarteten und mannigfaltigen neuen Phänomenen führen. Die physikalischen Überlegungen, die diese Phänomene verständlich machen, sind ohne eine exakte mathematische Lösung verständlich. Natürlich lassen sie sich auf dem Computer simulieren, doch sollte dem physikalischen Verständnis und der Untersuchung realer Objekte der Vorrang gegeben werden.

Ausgangspunkt der Überlegungen ist immer das Gesetz für die rücktreibende Kraft und seine spezielle Form. Dieses Kraftgesetz läßt sich empirisch bestimmen. Von dem Verlauf des Kraftgesetzes läßt sich dann auf die Abhängigkeit der Eigenfrequenz von der Amplitude schließen und endlich läßt sich dann aus der Kenntnis der Resonanzkurve des harmonischen Oszillators bei kleiner Dämpfung die Gestalt der Resonanzkurve ableiten, die bei einer von der Amplitude abhängigen Eigenfrequenz zu erwarten ist, und die die neuen Phänomene erklärt.

2. Aufbau der Oszillators

Als Oszillator dient ein symmetrischer Stab aus Holz oder Plexiglas, der sich als Drehpendel um eine horizontale Achse drehen kann. Abb.1

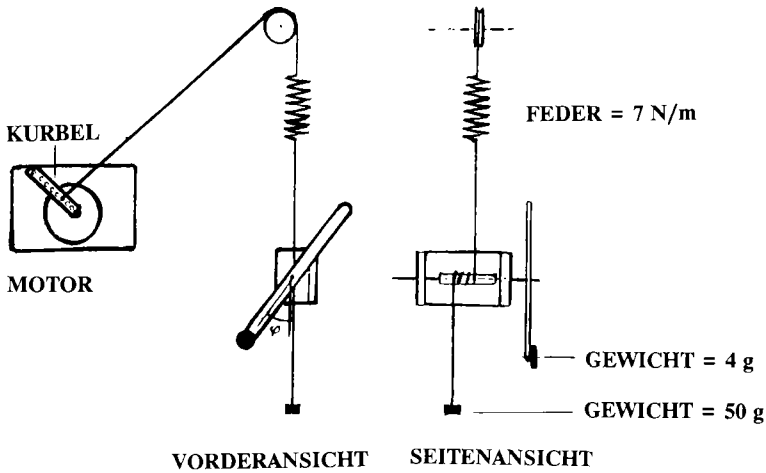


Abb. 1 Versuchsaufbau des Drehpendels, Vorderansicht, Seitenansicht
Anordnung als Gravitationspendel
Rücktreibendes Moment wird von Masse $m = 4 \text{ g}$ erzeugt.

Als Achse reicht eine Fahrradspeiche aus, die sich in einer Halterung reibungsarm drehen kann. Die Halterung läßt sich aus Kunststoff oder Metall herstellen, im einfachsten Fall genügen Schraubenmuttern als Lager, die durch eine Stativklemme gehalten werden. In unserem Fall hat der Stab eine Länge von $0,25 \text{ m}$ und eine Masse von 20 g . Der Oszillator wird durch ein äußeres Drehmoment harmonisch zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Dem dient ein Experimentiermotor mit variabler Frequenz ($0,5 < f < 1,5 \text{ Hz}$). Der Motor wirkt über eine Kurbel mit veränderlichem Radius, eine Rolle und eine Feder ($C = 7 \text{ N/m}$) sowie über einen dreifach um die Achse geschlungenen Faden auf den Oszillator. Der Faden wird unten durch ein Gewicht ($m = 50 \text{ g}$) gespannt gehalten. Um ein ausreichendes Drehmoment zu erhalten, muß die Achse des Pendels aufgeweitet werden. Im einfachsten Fall genügt es, Tesafilm auf die Achse zu wickeln. Besser ist es, ein Stück Gummi - oder Plastikschlauch auf die Achse zu kleben.

Der Durchmesser der aufgeweiteten Achse ist 0,6-0,7 cm. Die Kurbel des Motors ist ein auf die Achse fest eingepaßter Stab mit Löchern im Abstand von 1 cm. Als Angriffspunkt für den Faden eignet sich eine in eines der Löcher geschraubte Schraube. Variationsbereich des Hebelarms 1-8 cm.

Zur besseren Beobachtung sollte an die obere Umlenkrolle ein Punkt oder Zeiger geklebt werden, um die Phasenbeziehung zwischen Anregung und Schwingung besser zu studieren. Weiter kann an dem hinteren Ende der Achse ein Pappstreifen als Luftdämpfung angebracht werden. Dies ist dann empfehlenswert, wenn Rechnungen durchgeführt werden, die Luftdämpfung ist näherungsweise proportional zur Geschwindigkeit, während die Achsenreibung praktisch geschwindigkeitsunabhängig ist. Schließlich läßt sich dann auch der Einfluß der Dämpfung auf den Verlauf der Kurven studieren. Als ganz ungewöhnlich hilfreich hat es sich erwiesen, zwei identische Pendel nebeneinander aufzubauen und gleichzeitig zu betreiben. Dieses Arrangement erlaubt es, Phasenbeziehungen bei unterschiedlichen Moden und den Vergleich unterschiedlicher Amplituden sehr einfach und überzeugend zu beobachten.

Schließlich hilft es sehr, hinter dem Pendel eine Pappscheibe mit Gradeinteilung anzubringen, um quantitative Messungen von Amplituden durchzuführen.

In einer ersten Versuchserie wird die bekannte Resonanzkurve bei geringer Dämpfung gezeigt und damit an die bekannte Physik der erzwungenen Schwingungen angeknüpft. Ein mit der Auslenkung proportional anwachsendes rücktreibendes Moment wird mit zwei Federn erzeugt. Das rücktreibende Moment wird gemäß Abbildung 2 mit einem Faden, der über ein mit dem Pendel verbundenes Schnurrad geschlungen ist, auf das Pendel übertragen. Radius des Rades $r = 1,7$ cm.

Federkonstante der Pendel je $C = 7$ N/m. Die Federn sind leicht vorgespannt. (Vorspannung etwa 0,5 N)

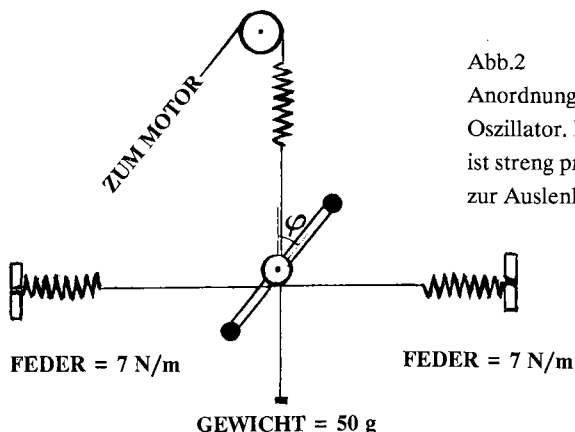
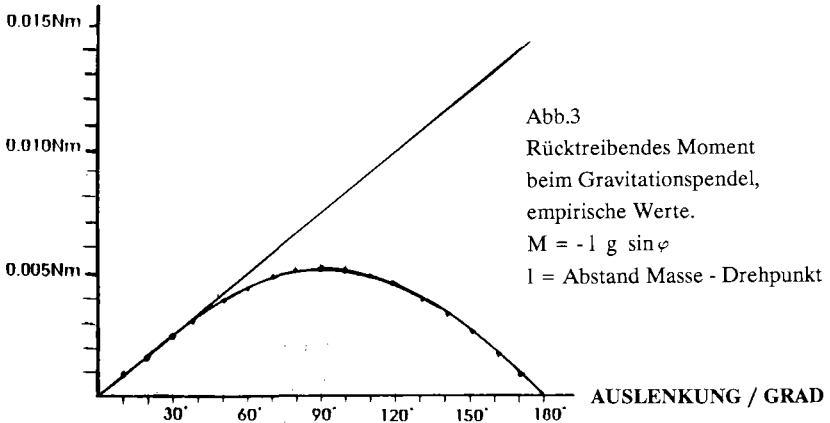


Abb.2
Anordnung für den harmonischer Oszillator. Rücktreibendes Moment ist streng proportional zur Auslenkung.

In einer zweiten Versuchsserie wird der Oszillator als Gravitationspendel betrieben. Dazu werden an einer Seite des Pendels zwei Scheiben von je 2g angebracht wie in Abb.1 bereits dargestellt.

Dann ergibt sich ein rücktreibendes Drehmoment wie in Abbildung 3. Die Abweichungen von der Linearität beginnen ab einer Auslenkung von etwa 30° merklich zu Buche zu schlagen, um dann zu einem auch qualitativ anderen Verlauf überzugehen. Bisher wurden im Schulunterricht Schwingungen in diesem Bereich selten thematisiert.

RÜCKTREIBENDES MOMENT



In einer dritten Versuchsserie wird ein neues rücktreibendes Drehmoment angebracht,

das eine Abweichung vom linearen Verhalten im entgegengesetzten Sinne zeigt. Dazu werden zunächst die Scheiben symmetrisch an je einem Ende des Pendels angebracht, um so das Trägheitsmoment zu erhalten und keine Änderung eintreten zu lassen.

Das rücktreibende Moment wird von einer Feder ($C = 7 \text{ N/m}$) erzeugt, die gemäß Abbildung 4 über einen Faden von unten angreift. Abstand des Angriffspunktes von der Achse: $L = 4 \text{ cm}$.

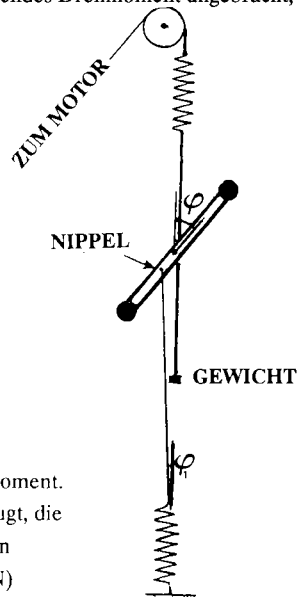
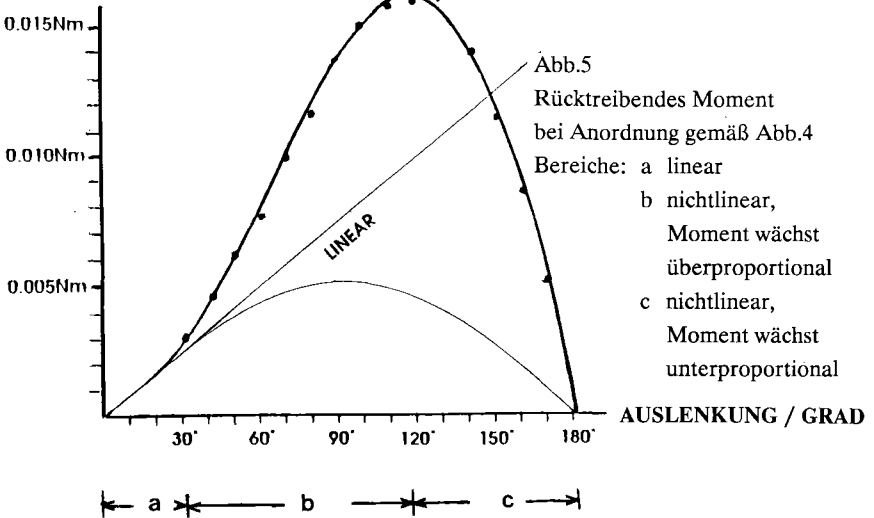


Abb.4: Anordnung für nichtlineares rücktreibendes Moment. Das Moment wird von einer Feder ($C = 7 \text{ N/m}$) erzeugt, die unterhalb des Pendels fest verankert ist und über einen Faden auf das Pendel wirkt. (Vorspannung, etwa 0,1 N)

Um den Angriffspunkt zu erhalten haben wir einen Fahrradnippel in ein Loch in der Pendelstange eingepaßt und den Faden in der Mitte des Fahrradnippels fest verklebt. Damit wird eine zusätzliche Reibung des Fadens vermieden. Man kann aber auch einfach ein kleines Loch in den Stab bohren und den Faden hindurchziehen und von hinten befestigen.

Den Verlauf des rücktreibenden Momentes zeigt Abbildung 5.

RÜCKTREIBENDES MOMENT

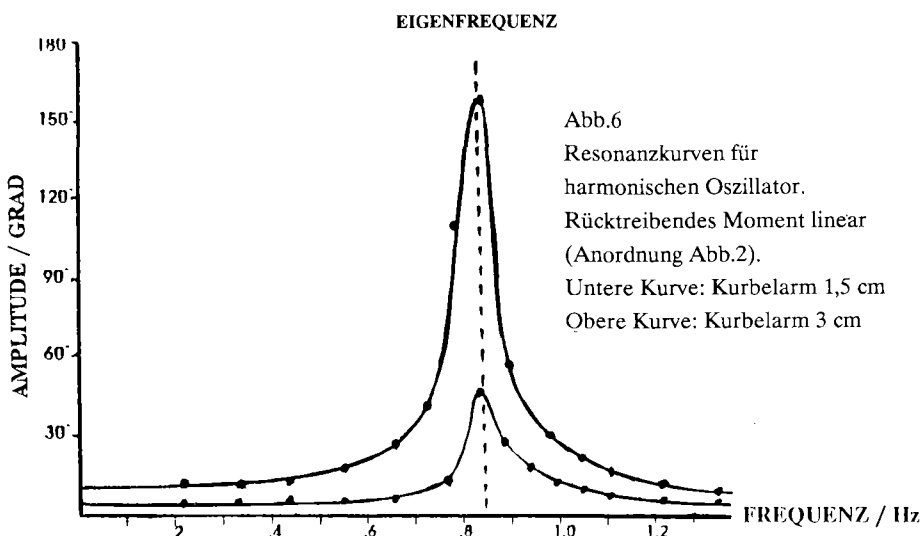


Wir können drei Bereiche unterscheiden. Bis zu Auslenkungen von etwa 25° haben wir einen linearen Bereich. Die Spannung der Feder bleibt konstant. Dem schließt sich ein Bereich an, in dem das rücktreibende Moment steil ansteigt. Das liegt an der zusätzlichen Elongation der Feder. Ab etwa 110° beginnt ein dritter Bereich, in dem das rücktreibende Moment wegen des dann kleiner werdenden effektiven Hebelarms zurückgeht, um bei 180° zu verschwinden. Für eine aus großer Entfernung angreifende Feder ($\varphi_1 = 0$) gilt näherungsweise $M = -L \sin \varphi [C(x_0 + L(1 - \cos \varphi))]$. Die Vorspannung der Feder ($F = x_0 \cdot C$) sollte so gewählt werden, daß das rücktreibende Moment für kleine Auslenkungen gleich dem des Gravitationspendels ist.

3. Die Experimente und ihre Deutung

3.1 Rücktreibendes Moment steigt linear mit der Auslenkung.

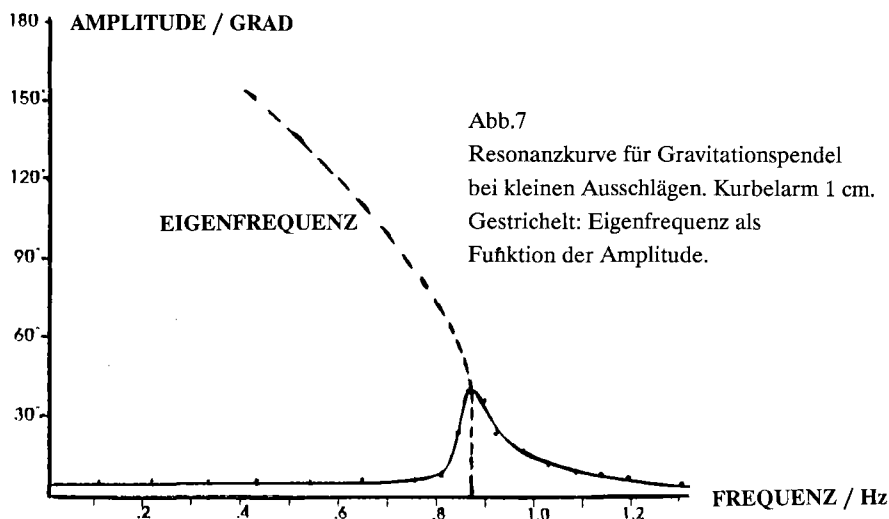
Wir beginnen mit einer schwachen Anregung, einem Kurbelarm von 1,5cm. Dann erhalten wir die bekannte Resonanzkurve mit einem Maximum bei der Eigenfrequenz, die hier $f_0 = 0,87$ Hz. beträgt. Verstärken wir die Anregung, Kurbelarm 3cm, erhalten wir insgesamt größere Amplituden, die in einem schmalen Frequenzbereich um die Eigenfrequenz sehr große Werte erreichen. Dieses scharfe Maximum - die Resonanz - ist charakteristisch für erzwungene Schwingungen bei schwacher Dämpfung. Die Eigenfrequenz ist bei linearem rücktreibendem Moment konstant und damit unabhängig von der Amplitude. Jeder Anregungsfrequenz entspricht eine und nur eine Amplitude der erzwungenen Schwingung.



Bei der experimentellen Ermittlung der Resonanzkurve sowie bei allen folgenden Versuchen sollte die Anregungsfrequenz immer nur langsam geändert werden und vor jeder Messung muß gewartet werden bis sich nach abklingenden Schwebungen der stationäre Zustand eingestellt hat.

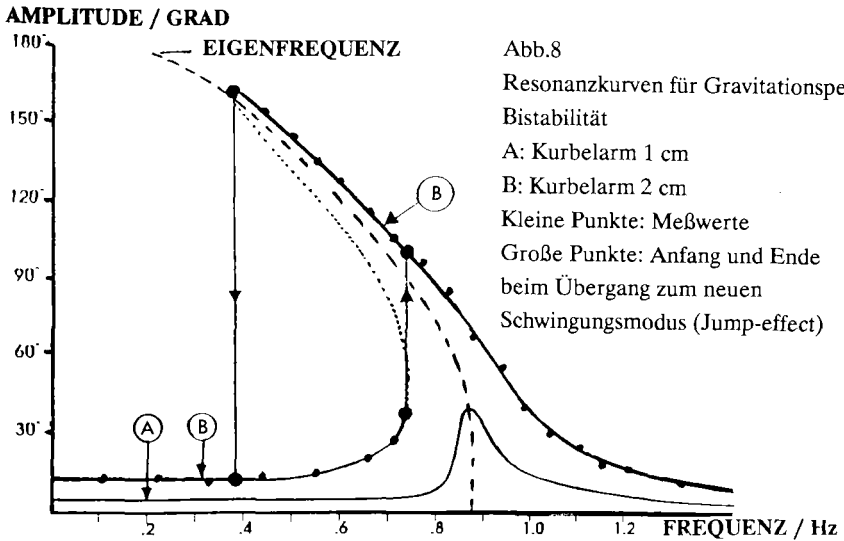
3.2 Rücktreibendes Drehmoment wird durch Nichtlinearität verringert, Bistabilität.

Wir beginnen mit dem Gravitationspendel und einer kleinen Anregung, Kurbelarm $r = 1\text{cm}$. Die Ausschläge bleiben im linearen Bereich und wir erhalten eine normale Resonanzkurve, die ihr Maximum ebenfalls bei der Eigenfrequenz von $0,87\text{Hz}$ erreicht. Abbildung 7. Jetzt fragen wir uns, in welcher Weise die Eigenfrequenz von der Amplitude abhängt, wenn die Ausschläge größer werden, und wir in den linearen Bereich eindringen. Qualitativ ist es leicht möglich, hier Voraussagen zu machen. Das rücktreibende Moment nimmt mit wachsenden Amplituden ab. Dies muß zu einer Reduzierung der auf die Ruhelage hin gerichteten Beschleunigungen führen und die Schwingungszeiten verlängern. In Abbildung 7 zeigt die gestrichelte Kurve den Verlauf der Eigenfrequenz als Funktion der Schwingungsamplitude. Bei kleinen Amplituden - senkrechter Anfang der Kurve - haben wir eine konstante Eigenfrequenz. Mit wachsender Amplitude nimmt die Eigenfrequenz ab und bei einer Amplitude von 180° geht die Eigenfrequenz gegen Null.



Wenn wir annehmen, daß die Resonanzkurve sich bei stärkeren Anregungen in der Nachbarschaft dieser Kurve entwickeln wird, kommen wir zu der in der Abbildung 8 dargestellten Form. Hier tritt ein neues Phänomen auf, die Bistabilität. In einem bestimmten Frequenzintervall gibt es zu einer anregenden Frequenz drei Punkte auf der Resonanzkurve. Das bedeutet, daß wir bei einer derartigen Anregungsfrequenz nicht eine sondern mehrere mögliche Schwingungsamplituden erwarten können. Das ist in der Tat der Fall und leicht zu beobachten. Bei einer Anregung mit dem Kurbelarm 3 cm kann die Resonanzkurve einmal mit niedrigen und einmal mit hohen Frequenzen beginnend aufgenommen werden. Die Punkte in Abb.8 zeigen empirisch gemessene Werte. Wir beobachten experimentell zwei Äste der Resonanzkurve. Von niedrigen Frequenzen aus-

gehend schwingt das Pendel in Phase mit der Anregung. Bei wachsender Frequenz nimmt die Amplitude zu bis zu einem Grenzwert, der bei etwa 0,67 Hz erreicht wird. Hier beginnt eine angefachte Schwingung, die einen stabilen Zustand bei erheblich größerer Amplitude erreicht. Dabei ändert sich auch die Phasenbeziehung, der Oszillator schwingt jetzt nahezu in Gegenphase. Wird die Frequenz weiter erhöht, ergeben sich die weiter rechts liegenden Meßpunkte. Beginnt man den Versuch mit hohen Frequenz, kommt man von rechts und mit abnehmender Frequenz wachsen die Amplituden weiter an. Die Phasenbeziehung ist immer näherungsweise die Gegenphase zu der Anregung. Erst bei einer Frequenz von etwa 0,4 Hz wird die Schwingung plötzlich gedämpft und es stellt sich ein Schwingungsmodus mit sehr geringer Amplitude ein. Wir sind wieder bei einer Schwingungsform, die in Phase mit der Anregung ist. Dieser Übergang zwischen zwei stabilen Schwingungsmoden wird gelegentlich jump-Effekt oder Sprung-Effekt genannt.



Bemerkenswert ist hier als grundsätzlich neues Phänomen, daß in einem bestimmten Frequenzintervall bei gleicher Anregung zwei ganz unterschiedliche Moden für die ange-regte Schwingung existieren können: Bistabilität. Genau dies ist sehr eindrucksvoll zu beobachten, wenn zwei Pendel nebeneinander gleichartig angeregt werden und jedes für sich Pendel in jeden Schwingungsmodus gebracht werden kann. Dazu genügt es das Pendel aus einer Auslenkung von 90° freizugeben. Es hängt dann nur von der Phase ab, ob eine angefachte oder eine gedämpfte Schwingung eintritt. Die dann jeweils zu einem stabilen Schwingungsmodus führt. Will man die angefachte Schwingung erhalten, muß man das Pendel in Gegenphase zur Anregung loslassen.

Hier kann sehr eindrücklich demonstriert werden, daß bei nichtlinearen Phänomenen bereits kleine Unterschiede in der Anfangsbedingung weitreichende und bleibende Folgen haben können. Der punktlinierte Teil der Resonanzkurve ist instabil. Beobachtbar sind nur die durchgezeichneten Äste der Kurve.

Als experimenteller Hinweis sei bemerkt, daß man bei den Versuchen die Frequenz immer nur sehr langsam ändern darf, damit das Pendel jeweils praktisch im eingeschwungenen Zustand verbleibt. Plötzliche Änderungen der Frequenz lösen leicht einen jump-Effekt aus und lassen das Pendel von einem Modus in den anderen springen. Um die Schwingung gerade bei großen Amplituden stabil zu erhalten, sollte man sorgfältig auf Symmetrie der Ausschläge achten. Korrekturen sind durch Verschieben des Pendels leicht möglich.

3.3 Rücktreibendes Moment wird durch Nichtlinearität vergrößert

Wird der Oszillator nicht als Gravitationspendel sondern in der in Abb.4 beschriebenen Weise mit einer von unten angreifenden Feder betrieben, ergibt sich das in Abbildung 5 bereits dargestellte rücktreibende Moment. Bis zu Auslenkungen von etwa 25° können wir das rücktreibende Moment als linear betrachten, bei geringer Anregung, Kurbelarm = 1cm, erhalten wir die normale Resonanzkurve. Abb.9, Kurve A, untere Kurve.

Im nächsten Bereich wächst jetzt das rücktreibende Moment mit einem Zusatzglied an, das proportional zu $+\varphi^3$ angenähert werden kann. Die Spannung der Feder vergrößert sich. Wir beginnen wieder mit Überlegungen zur erwarteten Form der Abhängigkeit der Eigenfrequenz von der Amplitude. Im Bereich größerer Amplituden steigt jetzt die rücktreibende Kraft stärker an, was zu einer größeren Beschleunigung in Richtung auf die Ruhelage führt. Die Schwingungsdauer wird reduziert, die Eigenfrequenz wird größer, sie ist in Abb.9 gestrichelt eingezeichnet. Mit stärkerer Anregung - Kurbelradius gleich $r = 2\text{ cm}$ - ergibt sich eine Resonanzkurve, die wieder in der Nachbarschaft der die Eigenfrequenz angegebenden Kurve verläuft. Kurve B.

AMPLITUDE / GRAD

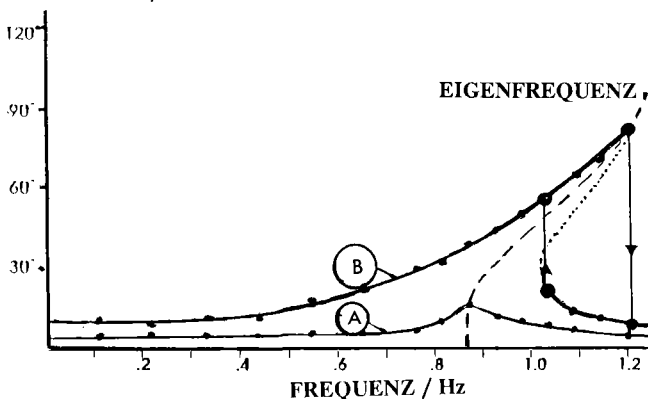
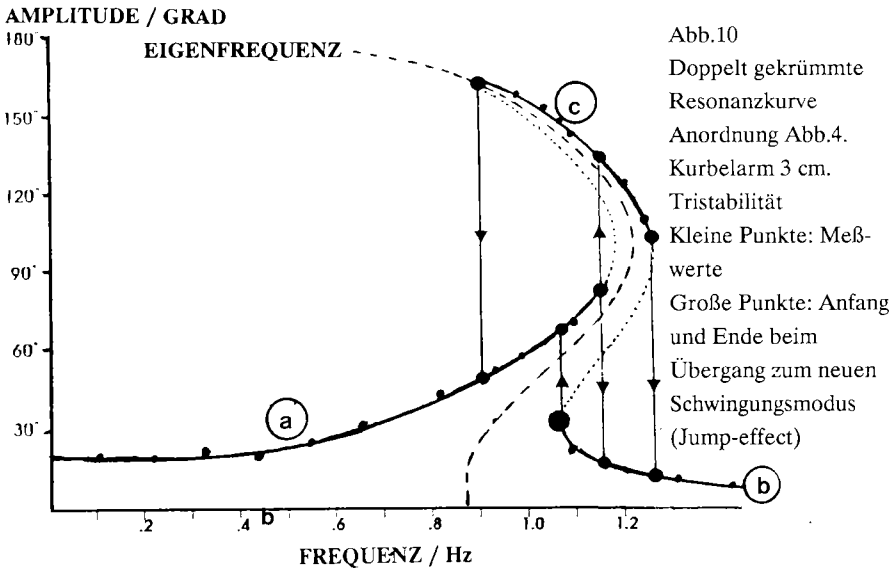


Abb.9
Resonanzkurven
Anordnung Abb.4.
Nichtlinearer Fall.
Bistabilität
A: Kurbelarm 1cm
B: Kurbelarm 2cm
Gestrichelte Kurve:
Eigenfrequenz
Kleine Punkte: Meßwerte
Große Punkte: Anfang
und Ende beim Übergang

Wieder bekommen wir zwei experimentell bestimmbare Kurvenäste. Die empirischen Werte sind eingezeichnet. Um die Kurvenäste zu bestimmen, wird von niedrigen, einmal von hohen Frequenzen ausgehend die Frequenz variiert. Auch hier ergibt sich ein Bereich der Bistabilität, in dem bei gleicher Anregung zwei verschiedenen Schwingungsmoden existieren können. Im Bereich der Bistabilität ist jetzt die Schwingungsform mit großer Amplitude nahezu in Phase mit der Anregung, während die Schwingung mit kleiner Amplitude nahezu in Gegenphase schwingt. Auch hier gilt, daß die Frequenz jeweils nur in kleinen Schritten verändert werden sollte, damit die Schwingung immer in der Nähe des stationären Zustandes bleibt. Auch hier ist der strichpunktierte Teil der Resonanzkurve instabil und nicht beobachtbar.

3.4 Doppelt gekrümmte Resonanzkurve, Tristabilität

Betrachten wir den Verlauf des rücktreibenden Momentes der von unten angreifenden Federkraft über den gesamten Amplitudenbereich bis 180° (Abbildung 5) so zeigt sich, daß das rücktreibende Moment ab einer Auslenkung von etwa 110° abzufallen beginnt und bei einer Auslenkung von 180° gegen Null geht. Wir fragen uns aufs neue nach dem Verlauf der Eigenfrequenz. Bei Amplituden größer als 120° steigt die Eigenfrequenz nicht weiter an, sondern nimmt ab. Bei Amplituden größer als 150° müßte sich das Verhalten der Eigenfrequenz ähnlich entwickeln wie ursprünglich beim Gravitationspendel. Dies entspricht einem doppelt gekrümmten Verlauf der Eigenfrequenz (Abb.10). Dementsprechend dürfen wir einen doppelt gekrümmten Verlauf der Resonanzkurve bei kleiner Dämpfung erwarten. Die daraus ableitbare Konsequenz ist, daß wir zwei Frequenzbereiche mit Bistabilität und - als neues Phänomen - schließlich einen schmalen



Frequenzbereich mit Tristabilität erwarten. Abbildung 10 zeigt die bei einem Kurbelarm von 3cm experimentell ermittelten Werte.

Die durchgezogenen Teile der Resonanzkurve entsprechen stabilen Schwingungen. Die punktierten Abschnitte der Resonanzkurve sind instabil und somit nicht als stabile Schwingungsform beobachtbar. Wir bekommen jetzt drei beobachtbare Abschnitte der Resonanzkurve. Zunächst ergeben sich die zwei bekannten Äste, wenn wir von kleinen bzw. großen Frequenzen ausgehen. In einem vergleichsweise großen Frequenzintervall von $0,87 < f < 1,25 \text{ Hz}$ können wir einen dritten Schwingungsmodus beobachten. Er ist charakterisiert durch Amplituden, die größer als 110° sind. Betrachten wir die Phasen, so finden wir die Schwingungen in den Kurvenabschnitten b und c praktisch beide in Gegenphase zur Anregung. Sind zwei identische Pendel aufgebaut und gleichartig angeregt, so läßt sich beobachten, daß sie nahezu in gleicher Phase aber mit drastisch unterschiedlichen Amplituden schwingen. In einem kleineren Frequenzintervall ($1,06 < f < 1,16 \text{ Hz}$) lassen sich bei gleicher Anregung drei stabile Schwingungsmoden gleicher Anregung beobachten.

3.4 Übergang zu chaotischen Schwingungsformen

Steigert man die Anregung weiter, so werden Schwingungen chaotischen Charakters möglich. Bei einem Kurbelradius von 7 cm ergeben sich sowohl im Bereich kleiner wie großer Frequenzen zunächst stabile angeregte Schwingungen. Hat man zwei Pendel aufgebaut, schwingen beide Pendel synchron, mit jetzt allerdings größeren Amplituden. Nähert man sich den in den vorhergehenden Versuchen untersuchten Bereichen, so ergeben sich Amplituden, die sich 180° nähern. Jetzt genügen kleine Unsymmetrien um die Pendel zum Überschlag zu bringen. Danach setzen chaotische Schwingungsformen ein, beide Pendel bewegen sich nicht mehr im Gleichtakt sondern völlig unkorreliert. Der chaotische Zustand kann sowohl von niedrigen wie von höheren Frequenzen her kommend erreicht werden. Faszinierend ist dabei zu beobachten, wie die Pendel zunächst im Gleichtakt schwingen und wie dann mit dem ersten Überschlag der Gleichtakt vollständig zerbricht und die Pendel sichtbar vollkommen unabhängig voneinander schwingen.

LITERATUR

1. WELTNER, K.; ESPERIDIAO, S.A.C.; GUEDES, G.P.; ANDRADE, R.F.S.: "Das physikalische Pendel, Resonanzkurve, chaotische Verhalten und Bistabilität". In: MNU, Jahrg. 45, Heft 5, Juli 1992, S. 298-301.
2. LUCHNER, K.; WORG, R.: "Chaotische Schwingungen". In: Praxis der Naturwissenschaften/Physik 35/49, 1986, S. 9-22
3. KHOSPROPOUR, R.; MILLET, P.: "Demonstrating the bent tuning curve", Am. J. Phys. 60, 429-432 (1992)
4. PAIN, I.G.: "Vibrations and Waves in Physics" (Cambridge, U.P., New York, 1984), 2nd ed., chap. 7.