

ARBEITSKREIS BAYERISCHER PHYSIKDIDAKTIKER

# BEITRAG AUS DER REIHE:

Werner B. Schneider (Hrsg.)

## Wege in der Physikdidaktik

Band 3

Rückblick und Perspektive

ISBN 3 - 7896 - 0513 - 1

Verlag Palm & Enke, Erlangen 1993

### Anmerkung:

Die Bände 1 bis 5 sind (Ausnahme Band 5) im Buchhandel vergriffen.  
Die einzelnen Beiträge stehen jedoch auf der Homepage

<http://www.solstice.de>

zum freien Herunterladen zur Verfügung.

Das Copyright liegt bei den Autoren und Herausgebern.

Zum privaten Gebrauch dürfen die Beiträge unter Angabe der Quelle  
genutzt werden. Auf der Homepage

[www.solstice.de](http://www.solstice.de)

werden noch weitere Materialien zur Verfügung gestellt.

# Chaos und Fraktale

## 1. Chaos

Daß physikalische Systeme chaotisches Verhalten zeigen können, ist bereits seit längerer Zeit bekannt. Die enorme Bedeutung und Tragweite wurde jedoch erst in letzter Zeit mehr und mehr sichtbar. Um die teilweise sehr grundlegende Bedeutung dieses neuen Zweiges der Physik sichtbar werden zu lassen, sollen im folgenden zunächst einige ganz einfache Beispiele geschildert werden.

Das in Abb.1 dargestellte Pendel kann in einem bestimmten Amplitudenbereich chaotisches Verhalten zeigen. Am unteren Ende einer Stange aus nichtmagnetischem Material, z.B. Messing, ist ein Permanentmagnet in Form einer Kreisscheibe befestigt (z.B. Permanentmagnet von einem "Puck" für einen Luftkissentisch). Zwischen zwei Plexiglasplatten sind drei weitere Permanentmagnete in Form von Kreisscheiben als gleichseitiges Dreieck eingeklemmt. Die Magnete sind dabei so orientiert, daß sie mit dem Pendelkörper eine attraktive Wechselwirkung zeigen. (Auch bei abstoßender Wechselwirkung kann man sehr schön chaotisches Verhalten in bestimmten Amplitudenbereichen beobachten). Die Pendelstange wird mit einem sehr dünnen kurzen Faden frei beweglich an einem Plexiglasbrett aufgehängt. Der Aufhängepunkt kommt dabei über dem Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks zu liegen. Die Abmessungen wählt man am besten so, daß die gesamte Anordnung, da aus Plexiglas gebaut, bequem mit einem Overheadprojektor für alle sichtbar projiziert werden kann.

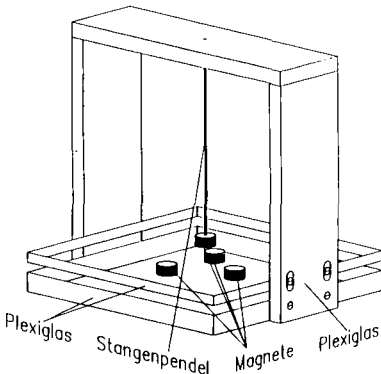


Abb. 1: Pendel für chaotische Schwingungen.

Das Pendel ohne die drei Magnete in der Grundplatte vollführt bei nicht zu großen Amplituden eine harmonische Schwingung. Durch die Anbringung von drei Magneten mit attraktiver Wechselwirkung, wird der zugehörige Potentialtopf mit drei zusätzlichen Potentialminima an den Stellen der Magnete versehen. Beim Übergang von einem der Potentialminima zum relativen Potentialminimum, das im Schwerpunkt gelegen ist, muß ein Potentialwall überwunden werden. Auf dem Maximum des Potentialwalls existiert für den Pendelkörper eine instabile Lage. Solche instabilen Lagen sind der tiefere Hintergrund dafür, daß das Pendel in bestimmten Bereichen ein chaotisches Verhalten zeigen kann.

Worin äußert sich nun der chaotische Charakter dieses Pendels? Als erstes fällt einem auf, daß im chaotischen Bereich der Bewegungsablauf von einem zunächst grob als gleich anzusehenden Startpunkt des Pendels nicht annähernd gleich sondern völlig unterschiedlich verläuft, mit einer gewissen Ähnlichkeit zum taumelnden Flug eines Schmetterlings. Man könnte einwenden, daß bei verfeinerter Festlegung gleicher Ausgangslagen, aus denen das Pendel losgelassen wird, (mit der Anfangsgeschwindigkeit 0) vielleicht doch die gleichen Bewegungsabläufe auftreten würden und der Endpunkt der Bewegung an einem der 3 Magnete der gleiche sein würde. Vereinfacht man die Betrachtung nur auf den Vergleich der Endpunkte bei gleichen Ausgangsbedingungen, so könnte man experimentell das Feld der möglichen Startpunkte des Pendels farblich

bezüglich der drei möglichen Endpunkte der Bewegung kartieren. Diese dreifarbig Karte würde unmittelbar um die drei Magnete herum einfarbige zusammenhängende Flächen ergeben. (Wenn das Pendel in unmittelbarer Nachbarschaft eines Magneten losgelassen wird, so wird die Pendelbewegung an diesem Magneten enden.) Jedoch außerhalb dieser drei Gebiete ergeben sich Strukturen in Form von dünnen farbigen Bändern, die immer schmäler werden. Schließlich werden die Bereiche so schmal, daß es unmöglich ist, die Positionierung des Ausgangspunktes des Pendelkörpers so genau vorzunehmen, um einwandfrei vorherzusagen zu können, bei welchem der drei Magnete der Pendelkörper letztlich zur Ruhe kommen wird. Nun könnte man einwenden, daß dies nur ein Problem der Meßgenauigkeit bei der Positionierung des Pendelkörpers wäre. Dabei ist jedoch zu bedenken, daß dies nicht nur eine Frage der Meßtechnik, sondern, daß hier die prinzipielle Frage der Meßgenauigkeit mit der Heisenbergschen Unschärferelation verknüpft werden muß. Aus diesen Überlegungen folgt, daß es in bestimmten Bereichen nicht nur praktisch, sondern auch prinzipiell unmöglich ist, genau vorherzusagen, an welchem der drei Magnete der Pendelkörper zum Stillstand kommt. Obwohl die einzelnen Gesetzmäßigkeiten, welche die Grundlage für die Bewegung des Pendelkörpers darstellen, (Gravitation und magnetische Wechselwirkung) sehr gut bekannt sind und im einzelnen streng deterministisch behandelt werden können, ergibt sich die Situation, daß wir in dieser Anordnung bei bestimmten Amplitudenbereichen nicht in der Lage sind, das System streng deterministisch zu beschreiben.

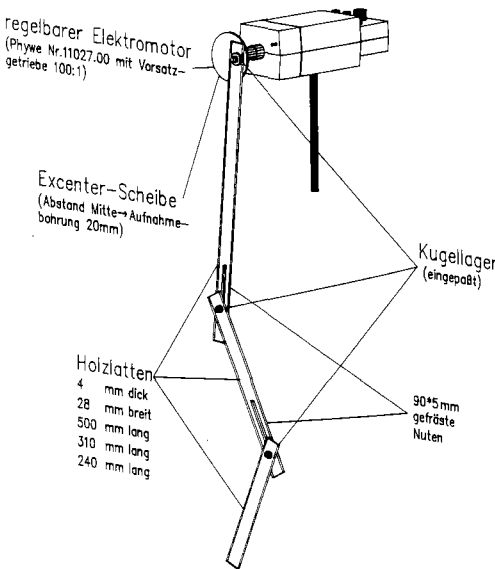


Abb. 2: Gekoppelte Pendel, für chaotische Schwingungen.

zeichner. Zum einen stabiles Gleichgewicht und zum anderen labiles Gleichgewicht. Diese beiden Fälle kann man sich sehr einfach durch eine z.B. paraboloidförmige Schüssel realisiert vorstellen. Im Fall des stabilen Gleichgewichtes wird bei der Auslenkung der Kugel aus der tiefsten Stelle der Schüssel eine rücktreibende Kraft hervorgerufen, welche die Kugel in die Ruhelage zurücktreibt. Ergebnis: Die Auslenkung wird durch die rücktreibende Kraft zurückgebildet. Aufgrund der Trägheit schwingt die Masse über die Ruhelage hinaus, es

Ein ausgezeichnetes Charakteristikum von chaotischem Verhalten besteht darin, daß das System für größere Zeiträume nicht streng deterministisch vorherbestimmt werden kann. Daher spricht man in diesem Zusammenhang auch von schwacher Kausalität.

Ein weiteres einfaches mechanisches System, das chaotisches Verhalten zeigt, ist die in Abb. 2 gezeigte Anordnung von Pendeln. Bei geeigneter Anregungsfrequenz erhält man Bewegungsmuster, deren chaotischer Verlauf deutlich sichtbar ist und sich gut zur Demonstration eignet. (Weitere Beispiele sind in der Literatur zu finden, wie z.B. in [1-8, 17].

Im folgenden soll nun dargestellt werden, wie dieses auf den ersten Blick sehr merkwürdige Verhalten eines Systems, nämlich trotz zu Grunde liegender streng deterministischer Gesetzmäßigkeiten eine nicht streng deterministische Verhaltensweise zu zeigen, zu deuten ist. In Abb. 3 sind zwei verschiedene Gleichgewichtslagen ge-

ergibt sich eine harmonische Schwingung um die stabile Ruhelage. Auch im Fall der labilen Lage kann man sich das Geschehen sehr leicht veranschaulichen: die paraboloidförmige Schüssel wird umgedreht, die Kugel liegt nun auf dem Scheitelpunkt. Wird die Kugel aus ihrer labilen Lage ausgelenkt, so ergibt sich eine Kraft, welche die Auslenkung nicht zurückbildet sondern im Gegenteil verstärkt. Die Kraft ist nun zur Auslenkung gleichgerichtet. Aufgrund dieses Zusammenhangs ergibt sich ein exponentielles Anwachsen der Auslenkung mit der Zeit. In diesem Fall wird eine kleinste Auslenkung aus der labilen Lage exponentiell verstärkt.

Ein Bleistift, den man versucht auf die Spitze zu stellen ist dafür ein gutes Beispiel. Angenommen, man hätte ihn genau in die labile Lage gebracht, so ergeben kleinste Einflüsse eine sehr große Wirkung, die über das exponentielle Anwachsen aus kleinsten Anfängen heraus erst verspätet als Umfallen festgestellt wird. Schon bei einem so einfachen Vorgang wie dem Würfeln (zumindest was die zugrundeliegenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten betrifft), ist bei einer genügend großen Anzahl von Durchgängen durch labile Lagen, wie z.B. das Kippen über eine Kante oder über eine Ecke des Würfels, prinzipiell nicht mehr vorhersagbar auf welcher Fläche

der Würfel nach einem Wurf zu liegen kommt. Eine Unsicherheit der Ausgangsbedingungen in der Größenordnung der quantenphysikalischen Grenzen, die durch die Unschärferelation vorgegeben sind, steigert sich durch die exponentielle Fortpflanzung nach ca. 10 sich frei ausbildenden "Streuprozessen" z.B. mit der Tischoberfläche (d.h. z.B. Kippen über eine Würfelkante) zur prinzipiellen Unvorhersagbarkeit des Ergebnisses [9]. Hier wird deutlich, wie durch den Einfluß der exponentiellen Verstärkung kleinste Abweichungen in den Anfangsbedingungen nach mehreren "Entscheidungsmöglichkeiten" des Systems (nach welcher Seite es z.B. von einem Potentialmaximum herunterläuft,) ein nicht mehr vorhersagbarer Endzustand angenommen wird. In gleicher Weise können bei komplexen Systemen, denen streng deterministische physikalische Gesetzmäßigkeiten zugrunde liegen, und die chaotisches Verhalten zeigen, prinzipiell langfristige Vorhersagen des Verhaltens des Systems unmöglich gemacht werden. So zeigen z.B. die turbulente Strömung eines Bergbaches oder die turbulente Strömung von großen Luftmassen in der Atmosphäre beim Wettergeschehen chaotisches Verhalten. Während man bei so einfachen Systemen wie z.B. Würfeln in einem Glücksspiel die labilen Gleichgewichtspunkte in denen das System gegen kleinste Störungen hochempfindlich ist, gut beschreiben kann, ist bei chaotischen, komplexen Systemen diese Empfindlichkeit gegen kleinste Störungen häufig in jedem Punkt der Phasenbahn gegeben. Durch die exponentielle Verstärkung kleinster Abweichungen sind trotz der streng deterministischen zugrundeliegenden Gesetze nur kurzfristige Vorhersagen möglich, dagegen sind langfristige Vorhersagen prinzipiell nicht mehr möglich. Lorenz, einer der Physiker, die zur Entwicklung der Theorie chaotischer Systeme sehr viel beigetragen haben, hat dieses Verhalten für das komplexe Beispiel des Wettergeschehens einmal so ausgedrückt: Der Flügelschlag eines Schmetterlings in China kann die Ursache dafür sein, daß zwei Wochen später in Amerika ein Wirbelsturm entsteht. Dieser Vergleich ist unter dem Namen Schmetterlingseffekt bekannt geworden. Zusammenfassend läßt sich sagen:

Dadurch, daß wir nicht in der Lage sind den Anfangszustand eines Systems im Phasenraum beliebig genau zu beschreiben (Heisenbergsche Unschärferelation), wird sich über den Effekt der exponentiellen Verstärkung

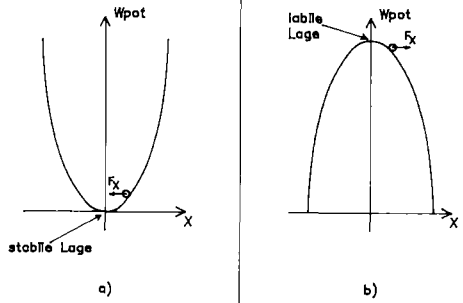


Abb. 3:  
a) Eine kleine Auslenkung bildet sich wieder zurück.  
b) Eine kleine Auslenkung verstärkt sich.

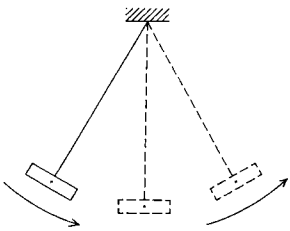
die Unsicherheit in der Anfangsbedingung zu einer prinzipiellen Nichtvorhersagbarkeit der langfristigen Entwicklung eines chaotischen Systems auswachsen.

Bei chaotischen Systemen ist es also prinzipiell unmöglich, eine streng deterministische Vorhersage für die zukünftige langfristige Entwicklung des chaotischen Systems zu geben. (Siehe auch weitere allgemeine Literatur zu chaotischem Verhalten, [10-13, 16].)

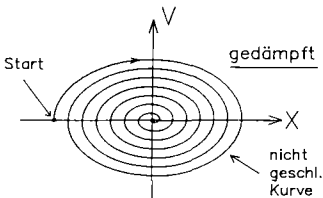
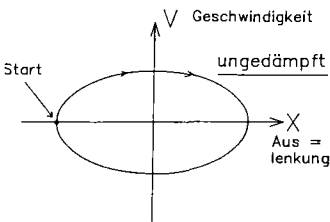
Mit dem relativ jungen Teilgebiet der Mathematik, der sog. fraktalen Geometrie, zeichnet sich jedoch eine Möglichkeit ab, die zukünftige Entwicklung eines chaotischen Systems, wenn auch nicht streng deterministisch so doch wenigstens global beschreiben zu können.

### lineare Vorgänge

z.B.: harmonische Schwingung eines Pendels (kleine Amplitude)



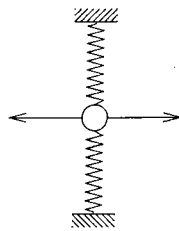
Zustandsraum (Phasenraum)



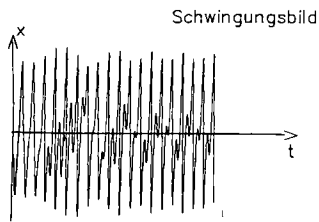
Beschreibung des Zustands des Systems

### nichtlineare Vorgänge

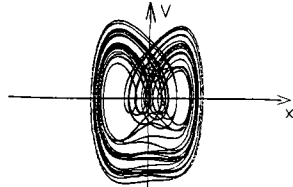
z.B.: Schwingung eines Pendels mit nichtlinearer Kraft = abhängigkeit



ungedämpfte chaotische Schwingung



Schwingungsbild



Zustandsdiagramm (Phasenraum)

Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, worin eine solche Möglichkeit der Beschreibung besteht. Abb. 4 zeigt die Gegenüberstellung von Phasenraumdiagrammen der harmonischen Schwingung eines mathematischen Pendels bei kleiner Amplitude, d.h. bei linearem Kraftgesetz und der Schwingung eines Pendels, dem ein nichtlineares Kraftgesetz zugrunde liegt. Im Phasenraumdiagramm der undedämpften harmonischen Schwingung erkennt man, daß die Auftragung der Geschwindigkeit gegen die Auslenkung  $x$  eine Ellipse ergibt, bei vorliegender Dämpfung (wie in der Realität gegeben) zeigt die Phasenraumbahn die Form einer Spirale. Hier endet also die Bewegung im Null-

Abb. 4:  
 a) Harmonischer Oszillator mit linearem Kraftgesetz.  
 b) Oszillator mit nichtlinearem Kraftgesetz (ungefähr proportional zu  $x^3$ )

punkt des Diagramms, d.h. die Geschwindigkeit und die Auslenkung sind Null. Dieser Endpunkt der Phasenbahn im Zentrum des Koordinatensystems im Phasenraum wird als Punkt-Attraktor bezeichnet. (Da er das System anziehen scheint.) Im Falle des Pendels mit dem nichtlinearen Kraftgesetz in Abb. 4b (siehe auch [14]) wird sich im chaotischen Bereich bei Aufhebung der Dämpfung eine Phasenbahn abzeichnen, die nicht geschlossen ist und die immer wieder abweichend von vorherigen Bahnen nur in einem bestimmten Auslenkungs- und Geschwindigkeitsbereich erfolgt. Wegen seines seltsamen verwickelten Aussehens wird eine solche Phasenbahn auch als seltsamer Attraktor oder chaotischer Attraktor bezeichnet. Während die Phasenbahnen in Abb. 4a geometrische Gebilde der Dimension 1 (Linien) sind, haben wir es bei dem seltsamen Attraktor mit einer neuen Art von geometrischem Gebilde zu tun. Es handelt sich gewissermaßen um ein Mittelding zwischen Linie und flächenmäßiger Erfüllung, (letztere dann, wenn die Fläche, die im x-v-Diagramm von dem Attraktor eingenommen wird, vollständig verschmiert ausgefüllt wäre). Es liegt ein Gebilde mit einer Dimension zwischen 1 und 2 vor, die als gebrochener Wert wie z.B. 1.35 ausgedrückt wird. Daher spricht man von fraktaler Dimension. Die Phasenbahn im chaotischen Bereich eines Systems kann langfristig nicht vorhergesagt werden. Die fraktale Geometrie bietet jedoch eine Möglichkeit, mit Hilfe von solchen seltsamen Attraktoren, die ja die zukünftige Entwicklung des Systems beschreiben, wenn auch keine streng deterministischen so doch wenigstens globale Aussagen machen zu können.

## 2. Fraktale

Ein schon fast klassisch gewordenes Beispiel für ein Fraktal ist die Küstenlinie einer Insel, etwa diejenige von England (siehe auch [15]). Man wird sehr schnell feststellen, daß die Länge der Küstenlinie entscheidend davon abhängt, mit welchem Maßstab man die Messung vornimmt. Sehr deutlich wird das Problem, wenn man z.B. auf einer Weltkarte im Maßstab 1 : 10.000.000 die Küste Großbritanniens mit einem Zentimetermaß durch Anlegen ausmißt und dieses Ergebnis vergleicht mit einer Messung auf der Grundlage einer Landkarte, die Tischgröße hat. Man kann sich unschwer vorstellen, daß bei zunehmender Verfeinerung über das Ab-

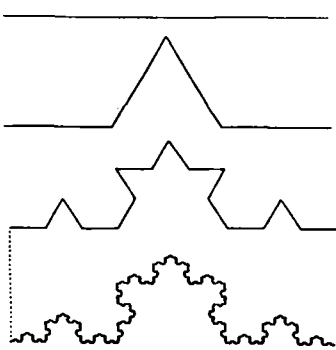


Abb. 5:  
Die Entstehung der Kochschen Kurve. Nach den drei ersten Entwicklungsschritten wurden viele weitere übersprungen.

schreiten der Küstenlinie mit einem Meßrad bis hinunter zu Aus- und Einbuchtungen von der Größe von Steinen bzw. Sandkörnern, die Küstenlinie immer länger wird. Nun sind in der Natur der Verfeinerung der Messung durch die "Körnigkeit" der Materie Grenzen gesetzt. Nehmen wir jedoch z.B. die sogenannte Kochsche Kurve aus Abb. 5, so sehen wir, daß bei diesem Beispiel aus der fraktalen Geometrie, mit der Möglichkeit, das Konstruktionsprinzip unendlich oft anzuwenden, die Kurve obwohl sie eine endliche Ausdehnung hat unendlich lang werden kann. Das Konstruktionsprinzip selbst ist sehr einfach und läßt sich wie folgt beschreiben:

Eine vorgegebene Strecke wird in drei gleiche Teile unterteilt. Der mittlere Teil wird herausgenommen und wie aus Abb. 5 ersichtlich durch ein "Dach" in Form eines gleichseitigen Dreiecks ersetzt.

Auf die gleiche Weise verfährt man mit dem daraus entstandenen vier Liniensegmenten. Jedes der Segmente wird

wieder in drei gleiche Teile unterteilt, das mittlere herausgenommen und jeweils wieder durch ein "Dach" in Form eines gleichseitigen Dreiecks ersetzt. Dieser Prozeß läßt sich ad infinitum fortsetzen.

(Computerprogramme zu Fraktalen siehe [28] und auch [29].) Eine weitere typische Eigenschaft von Fraktalen ist bei der Kochschen Kurve in idealer Weise erfüllt, nämlich die sogenannte Selbstähnlichkeit. Das bedeutet, daß bei beliebig häufigen Vergrößerungen die Kurve immer wieder die gleiche Struktur zeigt. So oft man auch eine Vergrößerung von dieser Figur herstellen mag, sie sieht immer gleich aus. Bei einer Küstenlinie ist diese Selbstähnlichkeit nur in annähernder Weise gegeben. In der Natur scheinen Fraktale eher die Regel als die Ausnahme zu sein. So haben z.B. Bäume, Sträucher, Wolken eine fraktale Struktur. So wiederholt sich z.B. die Struktur des Baumes in jedem Ast bis hinunter zu den kleinen Ästchen. Natürlich ist auch hier die Selbstähnlichkeit nicht in idealer Weise im Vergleich zu mathematischen Strukturen realisiert. Aber auch in unserem Körper befinden sich fraktale Strukturen wie z.B. das Geflecht der Blutgefäße, das mit seinen Verzweigungen und Verästelungen eine baumähnliche Struktur zeigt. Auch andere Organe wie z.B. die Lunge zeigen fraktale Strukturen. Es gibt sehr viele weitere Beispiele, wie z.B. Blumenkohl, Erosionsrinnen in der Landschaft, Wurzelwerk von Pflanzen usw. . Fraktale sind nicht nur auf den gegenständlichen Bereich beschränkt. Auch im abstrakten Bereich wie z.B. die Verästelungen und Verzweigungen der Befehlsrelationen in einem hierarchisch gegliederten System zeigen sich fraktale Strukturen. Die Ausbildung geometrischer Gebilde mit gebrochenen Dimensionen in der Natur kann man vielleicht vor dem Hintergrund sehen, daß z.B. die Versorgung eines biologischen Systems mit Sauerstoff und Nährstoffen durch die abgrenzende Oberfläche des Systems gegen die Umwelt erfolgen muß. Um die Versorgung zu optimieren muß die Oberfläche möglichst groß gemacht werden. Es liegt daher nahe, bei einem begrenzten vorgegeben Volumen wie z.B. bei der Lunge die zur Rezeption dienende Fläche gewissermaßen in das vorgegebene Volumen hineinzufalten, ganz ähnlich wie bei der Kochschen Kurve im Linienhaften.

Dadurch kann die Dimension zwei übertroffen werden, ohne die vollständige Raumauffüllung der Dimension drei zu erreichen bei der ja keine innere Oberfläche mehr vorhanden wäre.

Ein weiteres Beispiel aus der fraktalen Geometrie ist das sogenannte Sierpinski-Dreieck, Abb. 6. An diesem Beispiel läßt sich sehr schön zeigen, daß ein Fraktal auf verschiedene Weisen erzeugt werden kann. Eine ganz andere Methode als in Abb. 6 verwendet, hat M. Barnsley [18] vorgeschlagen. Hier entsteht in einer Art Chaosspiel das Sierpinski Dreieck durch Würfeln. Nähere Einzelheiten siehe auch [19, 20 u. 40].

### Die fraktale Dimension

Diese merkwürdige Eigenschaft der Fraktale zwischen einer Linie und dem Flächenhaften bzw. zwischen dem Flächenhaften und dem Volumenhaften zu liegen kann quantitativ durch die fraktale Dimension beschrieben werden. Die in Abb. 7 enthaltene Gegenüberstellung zwischen der Berechnung der Dimension in der euklidischen Geometrie und in der fraktalen Geometrie läßt deutlich werden, daß auch in der euklidischen Geometrie eine Selbstähnlichkeit enthalten ist. So kann man eine Strecke in z.B. drei gleiche Teile unterteilen, die Teilstrecke ist der ursprünglichen Strecke selbstähnlich. Noch deutlicher wird dies beim Quadrat und beim Kubus wo durch fortlaufende Unterteilung immer wieder selbstähnliche Gebilde entstehen. Ganz analog zur euklidischen Geometrie, wo die Dimension als Exponent zur Skalierung gesetzt die Anzahl der Elemente bei der Unterteilung ergibt, ist auch in der fraktalen Geometrie die Dimension (Zu den verschiedenen Möglichkeiten der Definition des Begriffs "Dimension" siehe auch [36]) definiert. Die Skalierung, d.h. die Einteilung der linearen Dimension des Objekts in Skalenteile

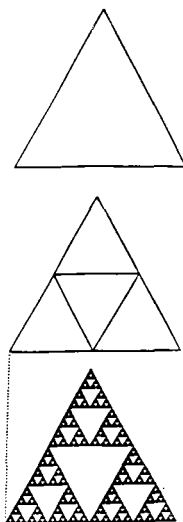


Abb. 6:  
Die Entstehung des Sierpinski-Dreiecks. Nach den ersten beiden Entwicklungsschritten wurden viele weitere übersprungen.





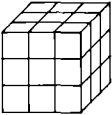
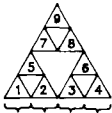
euklidische Geometrie		Dimension D:		fraktale Geometrie			
	Anzahl a (Elemente)	Skalierung s (Einteilung)	Gesetz: $a=s^D$		Anzahl a	Skalierung s	Gesetz: $a=s^D$
 Strecke	3	3	$3^1=3$		4	3	$4=3^D$ $D=\frac{\log 4}{\log 3}$
 Quadrat	9	3 <small>Die Seitenlänge des Ganzen ist 3 mal so lang wie die Seiten- länge eines Teilquadrates</small>	$3^2=9$		3	2	$3=2^D$ $D=\frac{\log 3}{\log 2}$
 Würfel	27	3	$3^3=27$		9	4	$D=\frac{\log 9}{\log 4}$ $D=1,585$

Abb. 7: Die Dimension D in der euklidischen und in der fraktalen Geometrie.

bestimmt dabei die Anzahl der entstehenden Elemente. Sehr deutlich wird dies beim Sierpinski-Dreieck. Im ersten Fall ist die Grundlinie des Dreiecks in zwei Einheiten unterteilt. Dies ergibt drei Dreiecke, im darunter dargestellten Schritt ist die Grundlinie des Dreiecks in vier Skaleneinheiten unterteilt und es ergeben sich neun Dreieckseinheiten. Die Koch - Kurve mit ihren Spitzen und Ausfaltungen ist eine Mischung aus Linie und Fläche und erreicht eine fraktale Dimension von: 1,26.

Das Sierpinski Dreieck liegt gemäß seiner fraktalen Dimension von 1,59 schon näher an einer flächenhaften Ausfüllung.

### 3. Einfache Experimente und Simulationen zu Fraktalen

Durch eine Hochspannungsentladung kann man schöne fraktale Strukturen erzeugen. Die experimentelle Anordnung geht aus Abb. 8 hervor. Eine Metallspitze berührt die Oberfläche eines Blattes Papier, das durch eine isolierende Zwischenschicht von einer Metallplatte getrennt wird. (Die isolierende Zwischenschicht kann z.B. eine Overhead-Folie sein.) Auf die Oberfläche des Papiers wird in einer sehr dünnen Schicht das Tonerpulver für eine Kopiermaschine aufgetragen. Zwischen der Metallspitze und der Metallplatte wird eine Hochspannungsentladung realisiert. Mit einer Infrarotlampe läßt sich die fraktale Struktur, (auch unter dem Namen Lichtenberg'sche Figur bekannt) konservieren. Solche hierarchisch verzweigten und damit selbstähnlichen Figuren wie diese Lichtenbergsche Entladungsfigur (Abb. 9) werden auch als Dendriten oder dendritische Strukturen bezeichnet. Das wohl bekannteste Beispiel für dendritisches Wachstum ist die



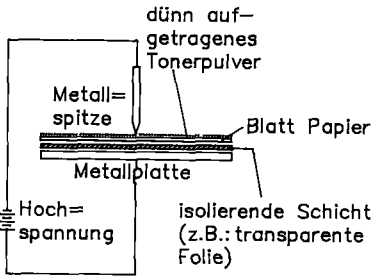


Abb. 8:  
Erzeugung einer fraktalen Struktur durch eine Hochspannungsentladung ("Lichtenbergsche Figur")

elektrolytische Abscheidung von z.B. Zink aus einer Zinksalzlösung. Das Experiment läßt sich sehr einfach in einer Petrischale durchführen. Wenn man auf die optische Qualität des Glasbodens der Petrischale achtet, so kann man das dendritische Wachstum direkt auf dem Overhead-Projektor verfolgen. Die sehr einfache experimentelle Anordnung läßt sich der Abb. 10a entnehmen. Ein Beispiel der sich ergebenden fraktalen Struktur ist in Abb. 10b zu sehen. Man kann auch eine Anordnung benutzen wie sie in [20, Seite 399], oder in [21] beschrieben ist.

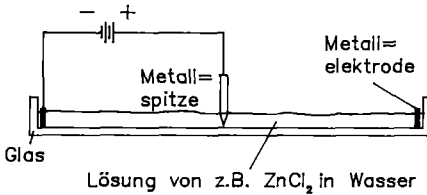


Abb. 10a:  
Wachstum einer fraktalen Struktur bei der elektrolytischen Abscheidung z.B. von Zink.

Ein weiteres Beispiel wie durch Anlagerung von kleinsten Teilchen eine fraktale Struktur entsteht, kann man an einer brennenden Kerze beobachten. Nachdem sich ein genügend ausgedehnter "See" aus geschmolzenem Wachs um den Docht herum gebildet hat, streut man etwas Toner-Pulver aus einer Kopiermaschine in den "Wachssee" hinein. Die kleinen Tonerteilchen werden von der im flüssigen, heißen Wachs herrschenden Zirkulation (Für den Antrieb dieser Zirkulation spielt die Marangoni-Konvektion eine Rolle, siehe auch Abb. 11a) erfaßt und transportiert. Vom Docht aus beginnend kann nun ein Fraktal durch Anlagerung der Tonerteilchen wachsen (Abb. 11b, siehe auch [22]).

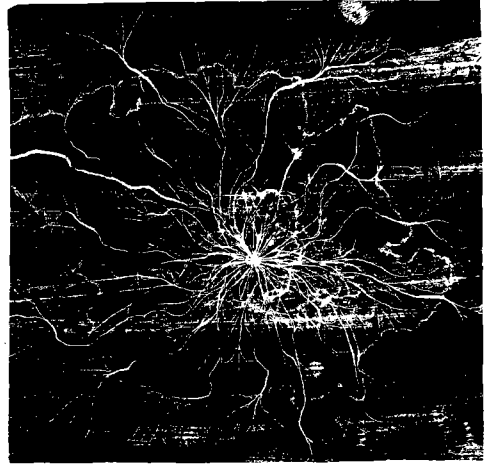


Abb. 9:  
"Entladungsfraktal" mit der Anordnung aus Abb. 8 erzeugt.

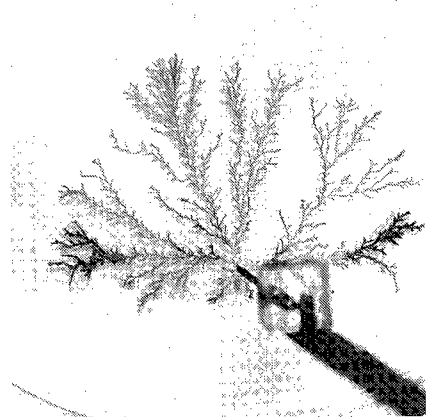


Abb. 10b:  
Fraktal, durch die Anlagerung von Zinkatomen in einer Anordnung nach Abb. 10 entstanden.

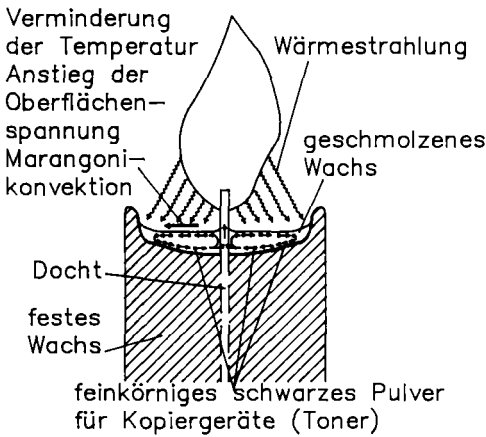


Abb. 11a:  
Transportmechanismus im geschmolzenen Wachs einer Kerze

Die experimentelle Anordnung und die modellmäßige Erklärung für das Wachstum gehen aus Abb. 12 hervor. An der Grenzschicht zwischen Kristall und Wasserglaslösung bildet sich eine dünne semipermeable Wand aus Silikagel und dem entsprechenden Metallhydroxid. Da durch die semipermeable Wand Wasser aus der Lösung zu dem Metallsalz eindringen kann, entsteht ein osmotischer Druck, der die semipermeable Wand aufreißen läßt, dadurch strömt konzentrierte Salzlösung in die Wasserglaslösung ein und bildet an der Grenzschicht sofort wieder eine semipermeable Wand. Dieser Vorgang setzt sich in dieser Weise immer weiter fort (siehe auch [22])

Lösung aus  $\text{Na}_2\text{SiO}_3$  /  $\text{Na}_4\text{Si}_4$  in Wasser

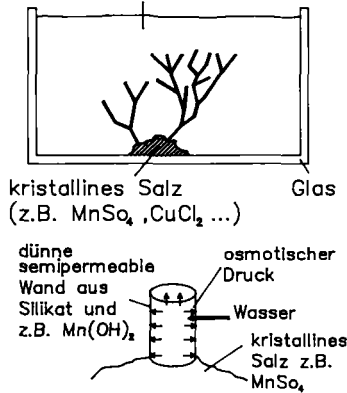


Abb. 12:  
Wachstum baumarziger, fraktaler Strukturen

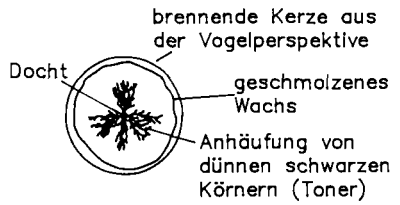


Abb. 11b:  
Fraktale Struktur aus Tonerteilchen

Das Wachsen von seetang-, baum- und korallenartigen Gebilden aus Kristallen z.B. von Kupfersulfat, Mangansulfat oder anderen Salzen, die auf dem Boden einer Küvette liegen, die mit einer Lösung aus Wasserglas in Wasser (Mischungsverhältnis ca. 1 zu 1.5) gefüllt ist, kann man je nach verwendetem Salz in relativ kurzer Zeit beobachten.

Zu weiteren einfachen Experimenten, vor allem aus dem Bereich der Chemie sei auf die Literatur verwiesen (z.B. [37, 38]).

Die Theorie zu all diesen Experimenten zur Erzeugung von fraktalen Strukturen ist nicht besonders einfach. Aber man kann einen guten Eindruck von dem physikalischen Geschehen, das sich dahinter verbirgt, über das Modell der sogenannten diffusionsbegrenzten Anlagerung (diffusion limited aggregation = dila) erhalten. Die Abbildungen 13 und 14 zeigen die Entwicklung einer Instabilität des Wachstums durch diffusionsbegrenzte Anlagerung von Molekülen an einem Cluster. Dies kann als Hintergrund für das fraktale Wachstum in den hier angegebenen experimentellen Beispielen verwendet werden. Dadurch, daß man die Linien konstanter mittlerer Dichte der Teilchen als ein Potentialfeld interpretiert mit den Stromlinien des mittleren Flusses der Teilchen als orthogonale Trajektorien, kann man diese diffusionsbegrenzte Anlagerung als Modell für das Wachsen einer fraktalen Struktur in einer elektrischen Entladung (die entsprechenden Größen sind hier das elektrische

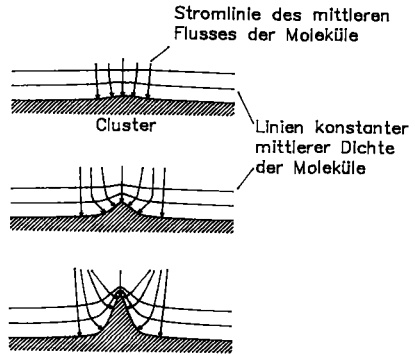
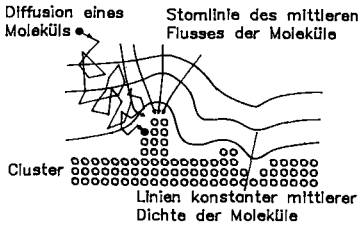


Abb. 13:  
*Modellmäßige Darstellung des Vorganges der diffusionsbegrenzten Anlagerung von Molekülen (bzw. Atomen) an einem Cluster.*

Abb. 14:  
*An einer ursprünglich glatten Oberfläche eines Clusters bildet sich durch zufällige Anlagerungen eine Erhöhung. Da die diffundierenden Moleküle eine aus der Clusteroberfläche hervorragende Wölbung (vergrößerte Fläche!) mit größerer Wahrscheinlichkeit treffen, wachsen solche Vorsprünge schneller als ein "Tal".*

Potential und das elektrische Feld) oder im Fall der viskosen "Ausfingerng" (Hele-Shaw-Zelle, siehe auch [26]) verwenden, (der Druck der viskosen Flüssigkeit entspricht dem Potentialfeld und der Fluß der Flüssigkeit entspricht dem Fluß der Teilchen).

Durch diese Möglichkeit der modellmäßigen Übertragung erlangt die diffusionsbegrenzte Anlagerung eine verstärkte Bedeutung [22, 23].

Eine gute Methode, den Hintergrund und das Geschehen bei der diffusionsbegrenzten Anlagerung zu zeigen und zu verstehen ist die Computersimulation (siehe auch [27]). Die Ergebnisse von zwei solchen Programmen sind in Abb. 15 und Abb. 16 gezeigt. In beiden Fällen wird die diffusionsbegrenzte Anlagerung dadurch simuliert, daß die Moleküle mit Hilfe der Funktion "Random" stochastische Bewegungen mit einer bestimmten Schrittweite ausführen. Im Fall der Abb. 15 kann man ein zylindersymmetrisches Feld überlagern, das der Diffusionsbewegung eine Driftbewegung, deren "Geschwindigkeitsfaktor" von Null an kontinuierlich eingestellt werden kann, zusätzlich aufträgt. Im Fall des algen- bzw. buschähnlichen Wachstums von Abb. 16 kann ein homogenes Feld überlagert werden, das eine Driftgeschwindigkeit zur Folge hat, die senkrecht zur Clusterunterlage auf den Cluster zu gerichtet ist und wieder von Null an kontinuierlich gewählt werden kann. Weiterhin können bei den Programmen die Anzahl der Anlagerungsoperationen, nach denen ein Farbwechsel eintritt sowie der Radius der angelagerten Moleküle gewählt werden. Nachdem die fraktale Struktur bis zu einer im Programm vorwählbaren Größe gewachsen ist, wird der Wachstumsrichtung folgend segmentweise die fraktale Dimension bestimmt. Dazu werden im Fall von Abb. 15 in Kreisringen mit wachsendem Radius die durch Anlagerung besetzten Pixel gezählt. Der Logarithmus der Zahl der Pixel wird gegen den Logarithmus des Radius der Kreisscheibe indem die Pixel enthalten sind in der rechten unteren Bildhälfte graphisch aufgetragen ("box-counting"-Methode [25, 19]). Die Steigung dieser Kurve ergibt die Dimension. In einer Tabelle wird die Dimension jeweils als Mittelwert aller vorhergehenden Berechnungen ausgeworfen. Der Berechnung der Dimensionen in Abb. 16 liegt das gleiche Verfahren zugrunde, nur wird jetzt die Zählung der besetzten Pixel in Streifen gleicher Breite vorgenommen. Die Streifenbreite bzw. die Breite der Kreisringe innerhalb derer die Zählung vorgenommen wird, kann in den Programmen vorgewählt werden. Abb. 17 zeigt die für das Verständnis des Geschehens bedeutsamen Zeilen aus einem Programm. Bei diesen Computersimulationen kann man den Einfluß der Parameter, wie z.B. die Driftgeschwindigkeit, die der Diffusionsbewegung überlagert ist, oder die Größe der angelagerten Moleküle auf das Wachstum und auf die

fraktale Dimension der dabei entstehenden fraktalen Strukturen, untersuchen. (Mehr zu Fraktalen, siehe [30-34].)

Eine zusammenfassende, ausführliche Darstellung des Themenbereiches Chaos und Fraktale im Hinblick auf den Unterricht erfolgt in [20] (ist mittlerweile auch mit Ergänzungen in Deutsch erschienen). Dazu sind bereits die ersten Arbeitsbücher für den Unterricht mit Aufgaben und Arbeitsblättern erschienen! [39, 40].

Interessenten können gegen Einsendung einer Leerdiskette die Programme zur Simulation der Anlagerung von Molekülen (Abb. 15 und 16) erhalten.

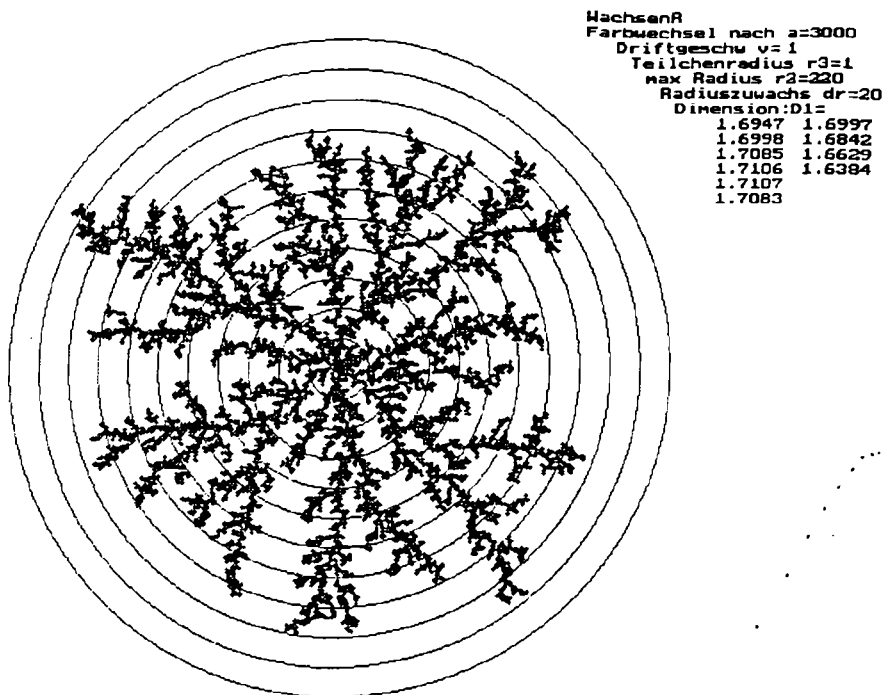


Abb. 15:  
Diffusionsbegrenzte Anlagerung von Molekülen bzw. Atomen an einen punktförmigen Cluster. Die Kreislinien, innerhalb derer die besetzten Pixel zur Berechnung der fraktalen Dimension ausgezählt werden, können wahlweise unsichtbar bleiben. Graphische Auftragung: Logarithmus der Zahl der Pixel nach oben, Logarithmus des Radius der Auszählungskreise nach rechts.

```

Linux 1
Farbschmelz nach a=2000
Driftgeschw v= 5
Teilchenradius r3=1
max Höhe h= 420
Scanbreite dr=20
Dimension:
1.8914 1.8879
1.8923 1.8889
1.8899 1.8897
1.8867 1.8904
1.8847 1.8912
1.8830 1.8920
1.8837 1.8925
1.8846 1.8925
1.8857 1.8920
1.8868 1.8906

```

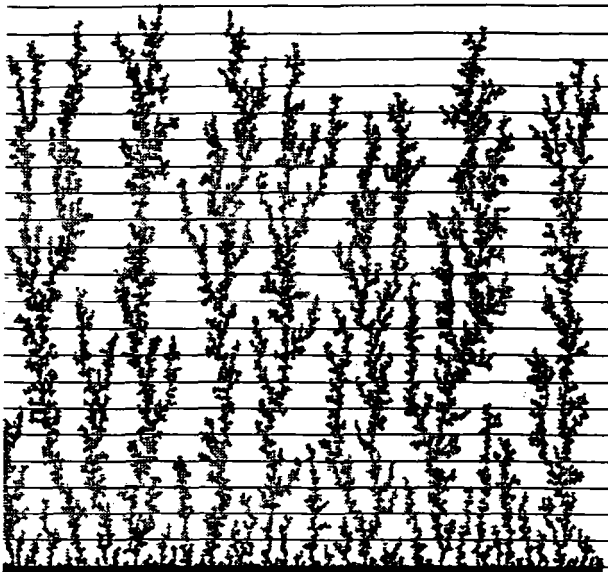


Abb. 16:

Diffusionsbegrenzte Anlagerung von Molekülen an einen linearen Cluster. Die Graustufungen entsprechen unterschiedlichen Farben auf dem Bildschirm. Die waagerechten Linien markieren die gewählte Scanbreite ( $dr = 20$ ). Graphische Auftragung: Logarithmus der Zahl der Pixel nach oben, Logarithmus der Kantenlänge des Auszählungsquadrates nach rechts.

```

repeat
  n:=Round(Int(nf));
  dx1:=1.0 -Random(3); dy1:=1.0 -Random(3)+v*dt;
  x:=x+dx1; y:=y+dy1;
  if x>440 then x:=x-440;
  if x<0 then x:=x+440;
  xi:=Round(x);yi:=Round(y);
  Farbe:=GetPixel(xi,yi);
  if (Farbe>8) and (Farbe<=tcol) then
    begin
      Setcolor(tcol-n);
      yd:=y-0.5*dy1;
      yd1:=Round(yd);
      SetFillStyle(SolidFill,tcol-n);
      FillEllipse(xi,yd1,r3,r3);
      x:=Random(441);
      y:=470-rs;
      nf:=nf+1/a;
      if Int(nf)>5 then nf:=0;
    end;
  if y<470-rs-10 then y:=470-rs;
  if yd<470-rs+20 then rs:=rs+4;
until (yd<470-h) or (KeyPressed);

```

Abb. 17:

Programmausschnitt (Turbo Pascal 6.0) zur Simulation der diffusionsbegrenzten Anlagerung aus Abb. 16. In den Zeilen 3 und 4 (in der repeat-until Schleife) wird die Zufallsbewegung (Diffusion) überlagert von der Driftbewegung gesteuert. In der 8. Zeile wird abgefragt, ob das diffundierende Molekül den Cluster getroffen hat. Wenn ja (Zeile 9), dann wird das Molekül mit der richtigen Farbe dort angelagert.

## Literatur:

- [1] Marx, G. (Hrsg.):  
Teaching non-linear phenomena,  
Band I: Welcome to our non-linear  
Universe, Proceedings of the in-  
ternational workshop on teaching  
non-linear phenomena at schools  
and universities, Lake Balaton,  
Hungary, April 1987.
- [2] Marx, G. (Hrsg.):  
wie [1], aber Band II: Chaos in education
- [3] Backhaus, U. und Schlichting, H.J.:  
Ein Karussell mit chaotischer Möglich-  
keiten, *Praxis* 7, (1987)
- [4] Herrmann, L.;  
Mingirulli, L. und Morawietz, P.:  
Teaching Chaos in Schools, in [2]
- [5] Luchner, K. und  
Worg, R.:  
Harmonische und chaotische  
Schwingungen, *MNU* 6, (1987), S. 337
- [6] Schröder, K.G.:  
Einfache Rückkopplungsexperimente  
als Realbeispiele für den iter-  
ativen Weg ins deterministische  
Chaos, *MNU* 1, (1989), S. 32
- [7] Brun, E.:  
Von Ordnung und Chaos in der  
Synergetik, *PhuD* 4, (1985), S. 289
- [8] Schlichting, H.J., Backhaus, U. und  
Küpker:  
Chaos beim Wasserrad. Ein einfaches,  
mechanisches Modell für das Lorentz-  
System, *PhuD* 3, (1991), S. 169
- [9] Pflug, A.:  
300 years after the principia:  
limits to the Newtonian approach  
in: [2], S. 131
- [10] Crutchfield, J.P.,  
Doyle Farmer, J.,  
Pachard, H.N. und  
Shaw, R.S.:  
*Chaos*, Spektrum, Heft 2, 1987, S. 78
- [11] Wolschin, G.:  
*Wege zum Chaos*, Spektrum, Heft 2, 1987,  
S. 91
- [12] Decker und Thomas:  
*Die Chaos Theorie, Bild der  
Wissenschaft*, Heft 1, 1983, S. 62
- [13] Schuster, H.G.:  
*Deterministic Chaos*, Weinheim,  
1984, Physik Verlag
- [14] Kuhn, W.:  
*Physik, Band II*, Braunschweig  
1990, Westermann-Verlag
- [15] Mandelbrot, B.:  
How long is the coast of Britain?  
*Science* 155 (1967), S. 636
- [16] Lüscher, E.:  
*Zur Physik des Chaos - 1. Teil*,  
*PhuD*, Heft 3, 1989, S. 207
- [17] Metzler, W.:  
*Chaos und Fraktale bei zwei  
gekoppelten Modellszillatoren*,  
*PdN-Ph*, Heft 7, 1987, S. 23
- [18] Barnsley, M.:  
Fractal modelling of real world  
images. In [32]
- [19] Schlichting, H.J.:  
*Schöne fraktale Welt*,  
erscheint demnächst in *MNU*
- [20] Peitgen, H.O.; Jürgens, H. und Saupe, D.  
*Fractals for the Classroom, Part  
one: Introduction to Fractals and  
Chaos*, New York, 1992,  
Springer Verlag
- [21] Matsushita, M.:  
*Experimental Observations of  
Aggregations*, in: *The Fractal  
Approach to Heterogeneous  
chemistry: Surfaces, Colloids,  
Polymers*, D. Avenir (ed.), Wiley,  
Chichester, 1989

- [22] Harreis, H.:  
Motivating low cost experiments in physics, in Proceeding of International Conference on Physics Education through Experiments, Tianjin, VR China, 1990, S. 164
- [23] Sander, L.M.:  
Fraktales Wachstum, Spektrum, Heft 3, 1987, S. 130
- [24] Merté, B.:  
Wachstum und Eigenschaften dendritischer Strukturen, Phys. Bl. 46, (1990), Heft 1, S. 21
- [25] Tél, T.:  
Introducing Fractals, in [2], S. 42
- [26] Vicsek, T.:  
How to build a Hele-Shaw-Cell, in [2], S. 76
- [27] Vicsek Tamas und Maria:  
Computer simulation of fractal growth, in [2], S. 62
- [28] Lauwierier, H.:  
Fraktale verstehen und selbst programmieren, Hückelhoven, 1989, Wittig Fachbuchverlag
- [29] Stahl, M.:  
Fraktale, Experimente mit mathematischer Graphik: Julia- und Mandelbrotmengen auf dem PC, Würzburg, 1991, Vogel-Verlag
- [30] Jürgens, H.;  
Peitgen, H.O. und Saupe, D.:  
Fraktale - eine neue Sprache für komplexe Strukturen, Spektrum, Heft 9, 1989, S. 52
- [31] Barnsley, M.:  
Fractals everywhere,  
Boston, 1988, Academic Press
- [32] Peitgen, H.O. und Saupe, D.:  
The Science of Fractal Images  
New York, 1988, Springer Verlag
- [33] Prusinkiewicz, P. und Lindenmayer, A.:  
The algorithmic beauty of plants,  
New York, 1990, Springer Verlag
- [34] Chaos und Fraktale:  
Sammelheft bei Spektrum der Wissenschaft: Verständliche Forschung,
- [35] Gerok, W. (Hrsg.)  
Ordnung und Chaos in der unbelebten und belebten Natur: Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, 115. Versammlung, 1988, Freiburg i.Br., Edition Universitäts, Stuttgart, 1990, Hirzel-Verlag
- [36] Mandelbrot, B.:  
Die fraktale Geometrie der Natur,  
Basel, 1991, Birkhäuser-Verlag
- [37] Field, R.J. und Schneider, F.W.:  
Oszillierende chemische Reaktionen und nichtlineare Dynamik, Chemie in unserer Zeit 22, (1988), Nr. 1, S. 17
- [38] Ross, J., Müller, S.C. und Vidal, C.:  
Chemical Waves, Science 240, (1988), S. 460
- [39] Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D., Malitsky, E., Pereiante, T. und Yunker, L.:  
Chaos, Iteration, Sensitivität, Mandelbrot-Menge; Ein Arbeitsbuch, Berlin, Stuttgart 1992, Springer-Verlag, Klett-Schulbuchverlag
- [40] Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D., Malitsky, E., Pereiante, T. und Yunker, L.:  
Fraktale, Selbstähnlichkeit, Chaosspiel, Dimension, Ein Arbeitsbuch, Berlin, Stuttgart 1992, Springer-Verlag, Klett-Schulbuchverlag