

ARBEITSKREIS BAYERISCHER PHYSIKDIDAKTIKER

BEITRAG AUS DER REIHE:

Werner B. Schneider (Hrsg.)

Wege in der Physikdidaktik

Band 4

ISBN 3 - 7896 - 0588 - 9

Verlag Palm & Enke, Erlangen und Jena 1998

Anmerkung:

Die Bände 1 bis 5 sind (Ausnahme Band 5) im Buchhandel vergriffen.
Die einzelnen Beiträge stehen jedoch auf der Homepage

<http://www.solstice.de>

zum freien Herunterladen zur Verfügung.

Das Copyright liegt bei den Autoren und Herausgebern.

Zum privaten Gebrauch dürfen die Beiträge unter Angabe der Quelle
genutzt werden. Auf der Homepage

www.solstice.de

werden noch weitere Materialien zur Verfügung gestellt.

H. Harreis

Weitere Anwendungsbeispiele für die graphische Methode zur Lösung relativistischer Probleme

Die im vorhergehenden Beitrag vorgestellte graphische Methode zur Lösung relativistischer Probleme wird im Folgenden anhand des inelastischen Stoßes bei einem Verkehrsunfall und einiger Beispiele aus der Hochenergiephysik näher erläutert.

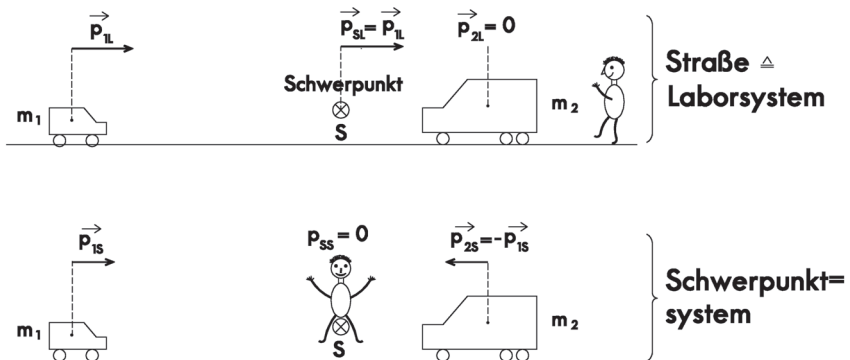


Abb. 1: Stoß im Labor- und im Schwerpunktsystem

Kann man eigentlich kinetische Energie „wegtransformieren“? Eine immer wieder gestellte Frage, wenn man die in Abb. 1 dargestellte Situation vorstellt:

Ein fahrendes Auto 1 der Masse m_1 habe den Impuls \vec{p}_{1L} von der Straße (Laborsystem) aus beobachtet, und nähere sich einem auf der Straße stehenden Auto 2 der Masse m_2 . Im Laborsystem ist die kinetische Energie des fahrenden Autos gegeben durch: $W_1 = p_{1L}^2 / 2m_1$. Dies ist auch die Gesamtenergie der beiden Autos von der Straße aus beobachtet. Erfolgt die Beobachtung im Schwerpunktsystem, so bewegen sich beide Fahrzeuge auf den Beobachter zu, wobei die Impulse entgegengesetzt gleich groß sind. Sind beide Massen gleich, $m_1 = m_2 = m$, so ergeben sich besonders einfache Beziehungen. Der Impuls des Fahrzeugs 1 ist dann im Schwerpunktsystem $p_{1s} = p_{1L}/2$ und Auto 2 bewegt sich in entgegengesetzter Richtung bei gleichem Impulsbetrag. Berechnet man jetzt die gesamte kinetische Energie der beiden Fahrzeuge im Schwerpunktsystem, so erhält man $p_{1L}^2 / 4m$, dies ist Hälfte der kinetischen Energie im Laborsystem. Wo ist die andere Hälfte geblieben? Es fällt nicht schwer, die im Vergleich zum Laborsystem fehlende Hälfte als kinetische Energie der Bewegung des Schwerpunkts relativ zur Straße auszumachen. Denn der Schwerpunkt bewegt sich im

Laborsystem bei dem Impulsbetrag des Fahrzeugs 1 in gleicher Richtung, also mit der kinetischen Energie $p_{1L}^2/4m$. Durch den Übergang ins Schwerpunktsystem wird die Bewegung des Schwerpunkts wegtransformiert und es bleibt nur noch die kinetische Energie der Fahrzeuge relativ zum Schwerpunkt übrig. Damit ist das Schwerpunktsystem (in dem der Schwerpunkt per Definition ruht) dadurch ausgezeichnet, daß in ihm die sich bewegenden Fahrzeuge (Körper) die minimale kinetische Energie (kinetische Energie der Bewegung gegen den Schwerpunkt) besitzen. Beim Übergang in ein anderes Inertialsystem kommt die kinetische Energie der Relativbewegung des Schwerpunkts dazu.

Diese Feststellung gilt auch für die spezielle Relativitätstheorie. Im Fall der klassischen Mechanik folgt daraus, daß sich die Geschwindigkeiten der Körper so transformieren müssen, daß die oben erläuterten Bedingung für die kinetische

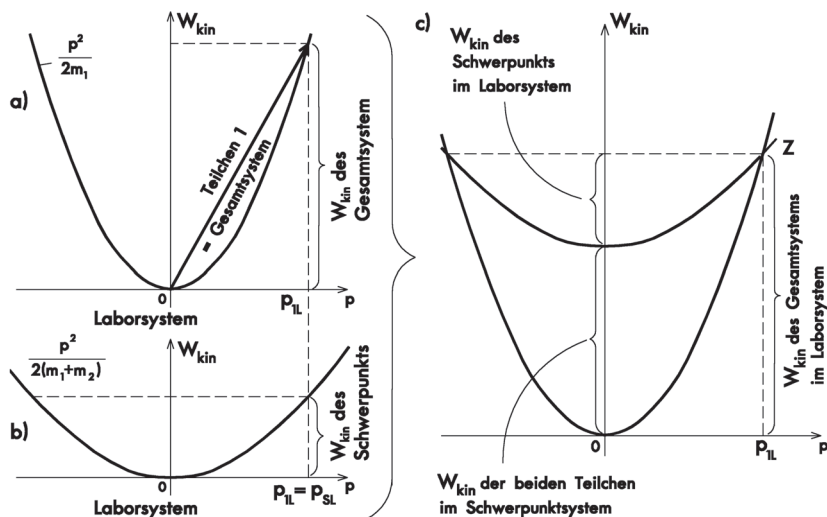


Abb. 2: Beispiel zum nichtrelativistischen Stoß

Abb. 2 a): Der Impuls-Energievektor des Teilchens 1 mit dem Impuls p_{1L} ist gleichzeitig der des Gesamtsystems im Laborsystem (Teilchen 2 ist im Laborsystem in Ruhe);

Abb. 2 b): Der Schwerpunkt des Gesamtsystems mit der Masse $(m_1 + m_2)$ hat im Laborsystem den Impuls $p_{SL} = p_{1L}$. Daraus folgt die kinetische Energie: $p_{SL}^2 / (2(m_1 + m_2))$;

Abb. 2 c): Aus 2a) und 2b) zusammengefaßt folgt: Von der kinetischen Energie des Gesamtsystems im Laborsystem wird die kinetische Energie des Schwerpunkts im Laborsystem abgezogen. Als Ergebnis erhält man die kinetische Energie der beiden Teilchen im Schwerpunktsystem. (relative Bewegung gegen den Schwerpunkt).

Energie erfüllt ist. Wie man leicht nachprüfen kann, folgt daraus die Transformationsvorschrift für die Geschwindigkeiten gemäß der Galilei-Transformation. Im Falle der speziellen Relativitätstheorie kann daraus eine Ableitung der Transformationsvorschrift für die Geschwindigkeiten gemäß der Lorentz-Transformation gewonnen werden, ohne letztere explizit zu verwenden. Dies soll hier nicht ausgeführt werden. Die Abbildungen sind jedoch so angelegt, daß die dafür nötigen Informationen daraus entnommen werden können.

Interessanter ist die zweite Frage, die sich an Abb. 1 anschließt: Welcher Anteil der kinetischen Energie steht bei einem inelastischen Stoß der beiden Autos maximal z.B. für Verformungsarbeit zur Verfügung?

Es ist die kinetische Energie, die in der Bewegung der beiden Fahrzeuge relativ

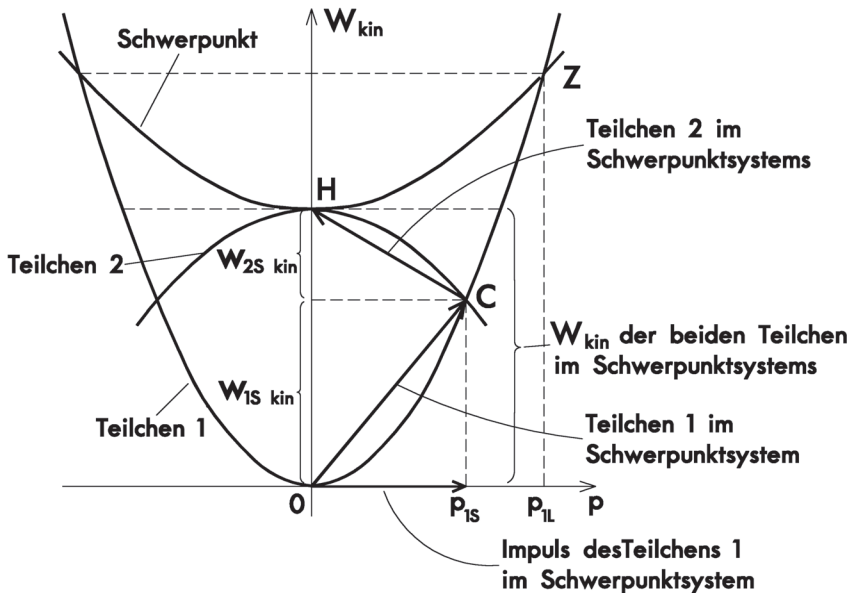


Abb. 3: Aufteilung der kinetischen Energie der beiden Teilchen im Schwerpunktsystem aus Abb. 2c). Die Konstruktion erfolgt in folgender Weise: Im Punkt H liegt der Scheitel der nach unten geöffneten Parabel mit dem Öffnungsparameter $1/2m_2$. Der Impuls-Energievektor des Teilchens 2 im Schwerpunktsystem liegt mit seinem Ende auf dieser Parabelkurve, und mit seiner Spitze im Scheitelpunkt H . Der Schnittpunkt C mit der Parabelkurve $W_{kin} = p^2 / 2m_1$ ergibt die Lösung der Aufteilung auf die beiden Teilchen. Die Impuls-Energievektoren der beiden Teilchen im Schwerpunktsystem sind eingezeichnet.

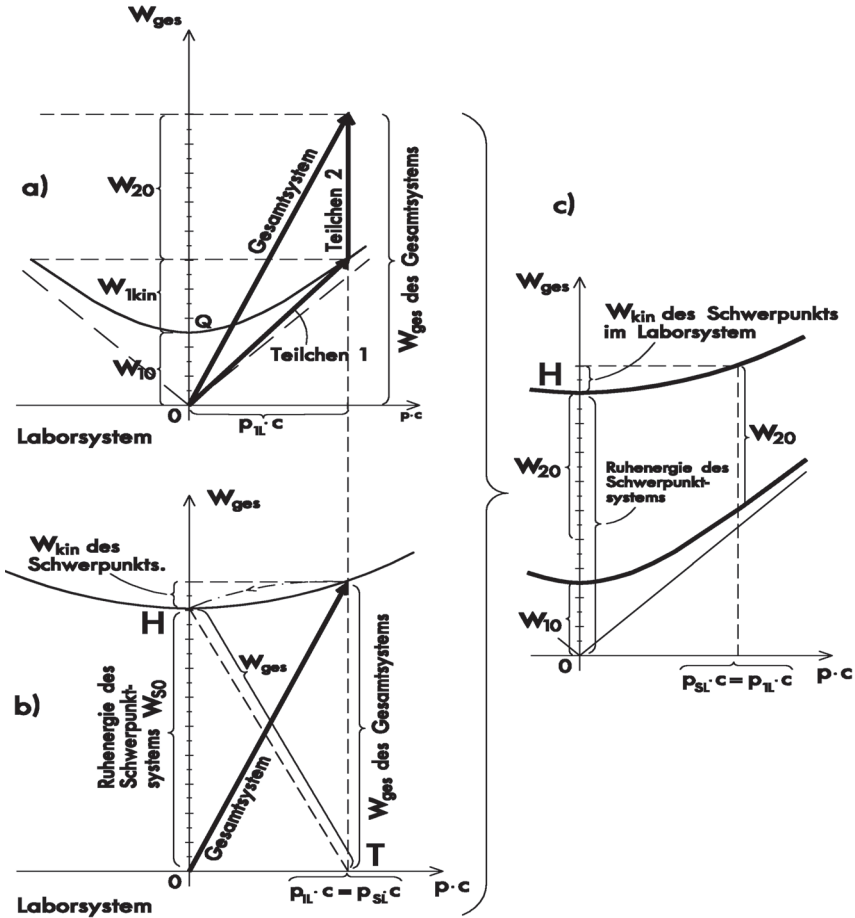


Abb. 4: Relativistischer Stoß:

Abb. 4 a): In Analogie zu Abb. 2a) wird der Impuls-Energievektor des Gesamtsystems im Laborsystem gebildet. Unterschied: Es muß für die Gesamtenergie die Ruhenergie der Teilchen mit berücksichtigt werden. Der Impuls-Energievektor des Teilchens 1 muß mit seiner Spitze auf der Hyperbel liegen, die mit Ihrem Scheitel bei Q liegt und der Beziehung $W_{ges1} = \sqrt{W_{10}^2 + p^2 c^2}$ genügt. Der Vektor für das ruhende Teilchen 2 ist senkrecht nach oben gerichtet, da er nur die Ruhenergie als Energiekomponente und keine Impulskomponente besitzt. Die Summe beider Vektoren ergibt den Vektor des Gesamtsystems.

Abb. 4b: Zu dem Impuls-Energievektor des Gesamtsystems wird nun die Ruhenergie gesucht. Da der Impuls des Gesamtsystems gegeben ist durch:

$p_{\text{SL}} c = p_{\text{IL}} c$ schlägt man mit dem Zirkel einen Kreisbogen mit W_{ges} des Gesamtsystems als Radius um den Punkt T. Der Schnittpunkt H mit der Ordinatenachse liefert das Dreieck HTO. Die Ruhenergie des Schwerpunktsystems W_{so} ist damit gegeben durch $W_{\text{so}}^2 = W_{\text{ges}}^2 - p_{\text{SL}}^2 c^2$ (Pythagoras am Dreieck RTO). Anschließend läßt sich die Hyperbelkurve der Gesamtenergie des Schwerpunkts mit dem Scheitel in H konstruieren.

Abb. 4c: Analog zu Abb. 2 werden 4a) und 4b) zu 4c) zusammengefaßt. Die Ruhenergie des Schwerpunktsystems kann nun wieder auf die beiden Teilchen aufgeteilt werden. Da die beiden Teilchen sich im Schwerpunktsystem relativ gegen den Schwerpunkt bewegen, besitzen diese auch noch kinetische Energie, die in der Ruhenergie des Schwerpunktsystems enthalten ist.

zum Schwerpunkt enthalten ist und nicht etwa die gesamte kinetische Energie. Da der Impuls des Schwerpunkts relativ zum Laborsystem erhalten bleiben muß, bleibt auch die kinetische Energie dieser Schwerpunktsbewegung erhalten und steht nicht für die Verformungsarbeit zur Verfügung.

Eine völlig analoge Frage stellt sich in der Hochenergiephysik. Welcher Anteil an der kinetischen Energie steht bei einem inelastischen Stoß eines Teilchens auf ein im Laborsystem ruhendes Targetteilchen maximal für die Erzeugung neuer Teilchen zur Verfügung? Wenn die beiden Ausgangsteilchen unverändert aus der Reaktion wieder hervorgehen sollen, kann nur die kinetische Energie der Bewegung, relativ zum Schwerpunkt für die Produktion neuer Teilchen genutzt werden. Falls die ursprünglichen Teilchen nach der Reaktion nicht mehr vorhanden sind, steht deren Ruhenergie noch zusätzlich zur Verfügung.

Diese beiden Probleme können mit der gleichen graphischen Methode gelöst werden wie in Abb. 2 und 3 sowie Abb. 4 und 5 dargestellt ist. Da die Abbildungen die Entwicklung kleinschrittig darstellen, sowie die Bildunterschriften sehr ausführlich sind und die Analogie zwischen der klassischen und der relativistischen Mechanik sehr weitreichend ist, benötigt man nur einige wenige begleitende Erläuterungen. Der Unterschied besteht lediglich darin, daß im relativistischen Fall an Stelle der Parabeln, die im Falle der Newtonschen Mechanik den Teilchen bzw. dem Schwerpunkt zugeordnet sind, Hyperbeln verwendet werden ($W_{\text{ges}} = \sqrt{W_0^2 + p^2 c^2}$). Bei der Berechnung der Ruhenergie des Schwerpunkts ist zu beachten, daß diese sich aus der Ruhenergie der beiden Teilchen und deren kinetischer Energie bezüglich der Bewegung relativ zum Schwerpunkt zusammensetzt.

Anhand des in Abb. 3 dargestellten Falles könnte auch die Frage gestellt werden, ob z.B. bei einem Auffahrunfall (siehe Abb. 1) der Sachverständige aus den Verformungen auf die dazu nötige Energie schließen kann?

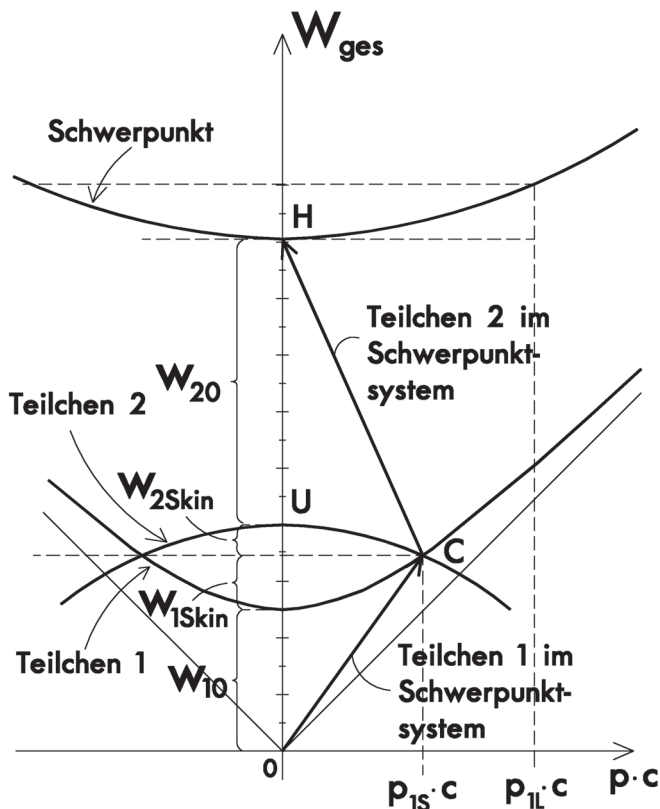


Abb. 5: Aufteilung der Energie: Zur Aufteilung der Energie konstruiert man die Hyperbelkurve für das Teilchen 2 mit der Ruhenergie W_{20} von H aus. H stellt dann den Ursprung eines Impuls-Energiekoordinatensystems dar, dessen Impulsachse nach rechts und Energieachse nach unten verläuft. In diesem Koordinatensystem wird Teilchen 2 durch eine nach unten geöffnete Hyperbel mit dem Scheitel bei U und der Formel:

$$W_{\text{ges}} = \sqrt{W_{20}^2 + p^2 c^2}$$

repräsentiert.

Der Schnittpunkt der beiden Hyperbelkurven im Punkt C (völlig analog zu Abb. 3) stellt die Lösung dar. Die Impuls-Energievektoren der Teilchen im Schwerpunktsystem sind eingezeichnet. Wenn die beiden Teilchen unverändert aus dem Stoßprozeß hervorgehen sollen, dann steht nur diese kinetische Energie der Relativbewegung gegen den Schwerpunkt für die Erzeugung neuer Teilchen zur Verfügung (Ansonsten zusätzlich die Ruhenergie der beiden Teilchen).

Bei einem völlig inelastischen Stoß kann die Geschwindigkeit des aufgefahrenen Fahrzeugs aus der Verformungsenergie ermittelt (abgeschätzt) werden. Ausgangspunkt für die graphische Lösung ist der Punkt H in Abb. 3. Aus dem Schnittpunkt der Parabel des Schwerpunkts mit derjenigen des Fahrzeugs 1 im Punkt Z erhält man den Ausgangsimpuls p_{1L} des aufgefahrenen Fahrzeugs. Sowohl im relativistischen als auch im nichtrelativistischen Fall ist die Aufteilung der kinetischen Energie im Schwerpunktsystem auf die Fahrzeuge bzw. auf die Teilchen im Sinne der Aufgabe nur eine Zusatzinformation. Für die Ableitung der Transformation der Geschwindigkeiten gemäß der Galilei- bzw. der Lorentz-Transformation ist es eine Notwendigkeit.

Literatur

- [1] H. Harreis und N. Treitz: Eine graphische Methode, Energie- und Impulsbilanzen zu veranschaulichen, PdN-Ph 2/46 (1997), S. 6
- [2] D.E. Liebscher: Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal, Akademie, Berlin 1991